



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS DE MARABÁ
FACULDADE DE ENGENHARIA DE MINAS E MEIO AMBIENTE

MANOEL FERREIRA NUNES
*MODELAGEM E CONTROLE EM COLUNAS DE
EXTRAÇÃO MINERAL*

MARABÁ
2013.

MANOEL FERREIRA NUNES

*MODELAGEM E CONTROLE EM COLUNAS DE
EXTRAÇÃO MINERAL*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia de Minas e Meio Ambiente da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Minas e Meio Ambiente.

Orientador: Prof. Dr. Reginaldo Sabóia de Paiva
Co-orientador: Prof. M.Sc. Evaldiney Ribeiro Monteiro

MARABÁ

2013.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Josineide Tavares, Marabá- PA)

Nunes, Manoel Ferreira.

MODELAGEM E CONTROLE EM COLUNAS DE EXTRAÇÃO
MINERAL / Manoel Ferreira. Nunes - 2013.

38.p; orientador; Reginaldo Sabóia de Paiva

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Faculdade de Engenharia de Minas e Meio Ambiente, Marabá, 2013.

1. Engenharia de Minas. 2. Modelagem. 3. Minério de cobre. 4.
Coluna de extração.. I.Título.

CDD - 22 ed.: 622.3

MANOEL FERREIRA NUNES

*MODELAGEM E CONTROLE EM COLUNAS DE
EXTRAÇÃO MINERAL*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia de Minas e Meio Ambiente da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Minas e Meio Ambiente.

Data de aprovação: ____/____/_____

Conceito: _____

Banca examinadora

Prof. Reginaldo Sabóia de Paiva - Orientador

Doutor em Engenharia Elétrica

Universidade Federal do Pará

Prof. Evaldiney Ribeiro Monteiro - Co-orientador

Mestre em Engenharia Química

Universidade Federal do Pará

Prof. Denilson da Silva Costa

Doutor em Engenharia Metalúrgica e de Minas

Universidade Federal do Pará

RESUMO

Neste trabalho busca-se como principal objetivo desenvolver um modelo matemático que possa ser utilizado como ferramenta no controle de vazão em colunas de extração mineral. O modelo desenvolveu-se a partir da análise de dados obtidos em ensaios de lixiviação de minério de cobre oxidado em colunas de extração mineral, sendo, portanto um método empírico. Analisou-se a variação da altura do fluido lixiviante em função tempo. Através da aplicação de elementos matemáticos, em particular, a Transformada Inversa de Laplace foi possível desenvolver um modelo para ser utilizado no controle de vazão em colunas, com isso torna-se possível estimar o tempo ótimo de contato entre o fluido lixiviante e o minério. O modelo proposto servira como suporte a futuros trabalhos voltado a exploração de minérios via lixiviação, e para o dimensionamento de colunas de extração mineral. Os resultados desse trabalho podem servir de base para que futuramente aprofundem-se os estudos voltados para o aproveitamento de minérios de baixo teor, com isso, espera-se ser possível obter uma redução nos custos operacionais provenientes da extração de minérios com essas características.

Palavras-chaves: modelagem; coluna de extração; cobre oxidado; transformada Inversa de Laplace.

ABSTRACT

This work seeks to be the main objective to develop a mathematical model that can be used as a tool to control flow in columns of mineral extraction. The model was developed from the analysis of data obtained from leaching tests of oxidized copper ore in mineral extraction columns, and therefore an empirical method. We analyzed the variation of the height of the fluid due to leaching time. Through the application of mathematical elements, in particular the inverse Laplace transform has been possible to develop a model that can be used to control flow in columns, it becomes possible to estimate the optimal time of contact between the fluid and ore leaching. The proposed model will serve as support for future work aimed at exploitation of minerals via leaching, and the sizing of columns of mineral extraction. The results of this study can serve as a basis for future deepen the studies focused on the use of low-grade ores, it is expected to be possible to obtain a reduction in operating costs resulting from the extraction of minerals with these characteristics.

Keywords: modeling, extraction column; oxidized copper; inverse Laplace transform.

AGRADECIMENTOS

Mais do que a todos os outros, agradeço a Deus por ter me permitido chegar ao fim desta etapa da minha vida.

Agradeço também aos meus pais e irmãos por terem sempre e invariavelmente me incentivado a perseverar nos estudos, ainda que muitas vezes desanimado.

Expresso minha gratidão aos colegas de curso, também agradeço a todos os professores da Faculdade de Engenharia de Minas e Meio Ambiente. Em especial ao professor Reginaldo Sabóia, por sua inestimável colaboração.

*”Embora isto possa parecer um paradoxo,
toda ciência exata é dominada pela idéia
de aproximação”.*

Bertrand Russell.

Sumário

Lista de Figuras	6
1 INTRODUÇÃO	7
2 FILTRAGEM	9
2.1 Equação da Filtragem	9
3 ESCOAMENTOS	14
3.1 Escoamento em Leito Fixo	15
3.2 Escoamento em Regime Laminar	16
3.3 Escoamento em Regime Turbulento	18
3.4 Balanço Material	20
4 MODELO MATEMÁTICO E METODOLOGIA DE SOLUÇÃO	22
5 Estimativa das Equações de Regressão	26
5.1 Cálculo das Constantes do Modelo	28
5.2 Resultados e Discussões	29
6 CONCLUSÃO	36
Referências Bibliográficas	37

Lista de Figuras

2.1	V experimental em vários tempos	13
3.1	Leito fixo ou coluna de recheio	15
3.2	Queda de pressão no escoamento através de leitos compactos	19
4.1	Diagrama esquemático (lixiviação em colunas)	22
4.2	Função passo unitário	24
4.3	$\bar{H}(s)$ no domínio do tempo	25
5.1	Curva Transladada (Aglomerado + Britado)	29
5.2	Curva Transladada (Britado)	29
5.3	Curva Transladada (Aglomerado)	30
5.4	Curva ajustada (Aglomerado + Britado)	31
5.5	Curva ajustada (Britado)	31
5.6	Curva ajustada (Aglomerado)	32
5.7	Altura de fluido no tempo, minério britado	33
5.8	Coluna com as camadas medidas	33
5.9	Curva com pontos de descontinuidades	34
5.10	Curva com a região que representa a função $L(t)$	35

1 INTRODUÇÃO

O cobre é um dos metais mais importantes industrialmente, de coloração avermelhada, dúctil, maleável e que apresenta alta condutibilidade elétrica e térmica, ponto de fusão a 1083 °C e densidade correspondente a 8,96g/cm³(a 20°C). É utilizado, atualmente, para a produção de materiais condutores de eletricidade (fios e cabos), e em ligas metálicas como latão e bronze. Entre as suas propriedades mecânicas destacam-se sua excepcional capacidade de deformação e ductibilidade. A flexibilidade do uso e alto índice de recuperação ao final do seu ciclo de vida lhe conferem superioridade em relação a materiais similares e são responsáveis pela sua larga utilização. [2]

A Província Mineral de Carajás possui um grande potencial para produzir cobre. Diversas jazidas foram descobertas como Sossego, Alvo 118, Salobo, Alemão, Pojuca, Serra Verde, Cristalino e Águas Claras. Alguns concentrados de cobre presentes nesses depósitos possuem características mais favoráveis a processos hidrometalúrgicos, como é o caso do minério oxidado, presente em cerca de 60 % das jazidas existentes na Serra dos Carajás. Atualmente, porém este cobre alterado é considerado resíduo da exploração, pois devido o seu baixo teor o custo de sua extração é pouco eficiente e economicamente inviável, sendo atualmente descartado em pilhas de rejeito. A hidrometalurgia tem a vantagem de necessitar de pequenos investimentos e ter baixo custo de operação, quando comparada com a pirometalurgia, além de reduzir os impactos ambientais provenientes das descargas de SO₂ na atmosfera. Frente às vantagens dos processos hidrometalúrgicos e ao desafio de pesquisar condições favoráveis para a recuperação do cobre oxidado via lixiviação tendo em vista a grande utilidade deste mineral e a esgotabilidade das jazidas de minérios, torna-se fundamental o desenvolvimento de pesquisas e tecnologias mais competitivas, a fim de utilizar-se este cobre como matéria-prima no mercado nacional e internacional de metais.

Conceitualmente, um modelo matemático ou simplesmente modelo, pode ser apresentado como uma representação de um sistema real, o que significa que um modelo deve representar um sistema e a forma como ocorrem às modificações no mesmo. [14]

Os modelos matemáticos podem ser mecanísticos ou empíricos. O modelo mecanístico pode ser construído pela visão da estrutura do sistema, dividindo-se o sistema em várias componentes e tentando entender o comportamento de todo o sistema através de cada parte e através das interações que ocorrem com as partes. O modelo empírico consiste em primeiramente ver os dados experimentais, possivelmente fazendo alguma análise dos dados e tentando fazer alguma suposição inteligente na forma de conjunto de equações ou mesmo através de explicações intuitivas, que poderão ser usadas como um modelo matemático e com os dados de uma forma conveniente. [6]

O objetivo central deste trabalho é propor um modelo matemático capaz de prever a altura ótima do fluido na coluna de lixiviação. Desta maneira é possível estimar o tempo de contato entre o agente lixiviante e o minério. Logo, é possível controlar o tempo de residência suficiente para saturar o meio fluido criando uma vazão de entrada e saída. Assim, pretende-se avançar nos estudos da lixiviação do minério de cobre com soluções de ácido sulfúrico (H_2SO_4), com propósito de contribuir para a otimização do processo de lixiviação em colunas.

Com relação a organização deste Trabalho de Conclusão de Curso TCC, optou-se por uma distribuição e organização de conteúdos relevantes ao desenvolvimento do trabalho. A introdução começa abordando a importância do cobre para o uso industrial, destacando o grande potencial produtivo da Província Mineral de Carajás, e sua tendência futura de produção de cobre via processos hidrometalúrgicos para o minério de cobre oxidado.

O capítulo 3 fala sucintamente da filtração, o tema é conduzido até se obter uma dedução para a equação da filtração. Na parte de escoamentos, no 3º capítulo, foca-se em escoamentos em leito fixo, descrevendo escoamento em regime laminar e em regime turbulento. O balanço material, tema imprescindível para os objetivos desse trabalho é abordado no fim do capítulo. No capítulo 4, desenvolveu-se o modelo matemático proposto e a metodologia de solução, objetivo central do trabalho. O capítulo 5 é dedicado ao cálculo das constantes e a análise e discussão dos resultados. Finalmente, na sequência, a conclusão fecha o trabalho.

2 FILTRAGEM

A filtragem é uma das aplicações mais comuns do escoamento de fluidos através de leitos compactos. A operação industrial é análoga às filtrações realizadas em um laboratório, que utilizam papel de filtro e funil. É uma operação que pode ser denominada como a separação de partículas sólidas presente em um fluido atravessando um meio filtrante onde os sólidos se depositam. O fluido (um líquido ou um gás) circula através do meio filtrante em virtude de uma diferença de pressão no meio. [8]

Em filtrações industriais o conteúdo de sólidos pode variar de traços a uma percentagem elevada. O fluido circula através do meio filtrante em virtude de uma diferença de pressão no meio. Este aspecto classifica os filtros como aqueles que operam com alta pressão sobre o meio, os que operam em pressão atmosférica e os que operam a baixas pressões (vácuo). Pressões acima da atmosférica podem ser conseguidas por ação da força da gravidade atuando sobre uma coluna de líquido, por meio de bombas e compressores, bem como pela ação da força centrífuga. [9]

2.1 Equação da Filtragem

Na filtragem,¹ a resistência do meio ao fluxo do fluido aumenta com o passar do tempo à medida que o meio filtrante vai sendo obstruído ou quando se forma uma torta. As principais magnitudes de interesse são a velocidade do fluxo através do filtro e a queda de pressão na unidade. À medida que o processo ocorre, diminui a velocidade do fluxo ou aumenta a queda de pressão. Na chamada filtração a pressão constante, a queda de pressão permanece constante e a velocidade do fluxo vai diminuindo com o tempo. Menos frequente é o aumento progressivo da pressão para obter uma filtração à velocidade constante.

A partir desses fatores fundamentais obtém-se uma expressão envolvendo constan-

¹A demonstração da equação da filtragem apresentada nesse capítulo foi obtida e adaptada da seção **A teoria simplificada da filtração**. Referência [1]

tes que podem ser determinadas experimentalmente. As equações de projeto são desenvolvidas a partir de ensaios em escala reduzida. A velocidade de operação é dada pela relação:

$$V = \frac{F_P}{R} \quad (2.1)$$

com:

V = Velocidade

F_P = Força propulsora;

R = Resistência.

A força propulsora (F_P) é a soma da queda de pressão na torta e no meio filtrante. As resistências (R), podem ser consideradas em série e desta forma teremos uma resistência da torta e uma do meio filtrante. A resistência da torta varia com o tempo devido ao aumento de sua espessura e a resistência do sistema (meio filtrante + canais do filtro) permanece constante ao longo do processo. Para o equacionamento da equação de filtração será considerado o processo de filtração com formação de torta incompressível.

Para o Cálculo de ΔP_1 (resistência da torta), admite-se fluxo unidimensional e velocidade constante.

$$\frac{d\nu}{dx} = 0 \quad (2.2)$$

Considerando a Lei de Darcy para o escoamento de um fluido em um meio poroso e baseando-se principalmente na queda de pressão do sistema, tem-se:

$$\frac{dP_1}{dx} = \frac{\mu}{k} \nu \quad (2.3)$$

Onde dP_1 é a queda de pressão através da torta e k é a permeabilidade da torta. Nestas condições a massa de sólidos (dm) na camada da torta é:

$$dm = (1 - \epsilon) A dx \rho_s \quad (2.4)$$

Onde:

ρ_s = massa específica dos sólidos;

A = área;

ϵ = porosidade do meio poroso.

Rearranjando,

$$dx = \frac{dm}{(1 - \epsilon)A\rho_s} \quad (2.5)$$

Substituindo 2.5 em 2.3 temos,

$$dP_1 = \frac{1}{k\rho_s(1 - \epsilon)} \cdot \frac{\mu\nu}{A} dm \quad (2.6)$$

Consideremos α , a resistividade específica da torta (m/kg), se:

$$\alpha = \frac{1}{k\rho_s(1 - \epsilon)} \quad (2.7)$$

Então:

$$dP_1 = \alpha \frac{\mu\nu}{A} dm \quad (2.8)$$

Integrando:

$$\Delta P_1 = \alpha \frac{\mu\nu}{A} m \quad (2.9)$$

Analogamente, para ΔP_2 , (resistência do sistema) tem-se:

$$\frac{dP_2}{dx} = \frac{\mu}{k} \nu \quad (2.10)$$

Onde dP_2 é a queda de pressão através do filtro

Integrando 2.10:

$$\Delta P_2 = \frac{\mu\nu}{k} Lm \quad (2.11)$$

onde Lm , espessura do meio filtrante é constante. Como,

$$R_m = \frac{Lm}{k} \quad (2.12)$$

com R_m = resistência do meio filtrante.

Logo,

$$\Delta P_2 = \mu\nu R_m \quad (2.13)$$

A queda total de pressão (ΔP) é expressa pela equação abaixo:

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 \quad (2.14)$$

Substituindo as equações 2.9 e 2.13 em 2.14 temos:

$$\Delta P = \mu\nu \left(\frac{\alpha m}{A} + R_m \right) \quad (2.15)$$

Seja, c_s = concentração da suspensão, então:

$$c_s = \frac{m}{\nu} = \frac{\text{massa de sólidos na suspensão}}{\text{volume de filtrado}} \quad (2.16)$$

$$v = \frac{1}{A} \cdot \frac{dV}{dt} \quad (2.17)$$

Substituindo 2.16 e 2.17 em 2.15,

$$\Delta P = \left(\frac{\alpha c_s V}{A} + R_m \right) \mu \frac{1}{A} \cdot \frac{dV}{dt} \quad (2.18)$$

Rearranjando, obtém-se a equação fundamental da filtração.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\mu}{A \Delta P} \left(\frac{\alpha c_s V}{A} + R_m \right) \quad (2.19)$$

Considerando a filtração com pressão constante podemos, separar os termos e introduzir as constantes K_p e B desta forma:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\mu c_s \alpha}{A^2 \Delta P} V + \frac{\mu R_m}{A \Delta P} = K_p V + B \quad (2.20)$$

Onde as unidades no SI para K_p são s/m^6 e para B s/m^3 .

$$K_p = \frac{\mu c_s \alpha}{A^2 \Delta P} \quad (2.21)$$

$$B = \frac{\mu R_m}{A \Delta P} \quad (2.22)$$

Para filtração a pressão constante, α é constante (torta incompressível) e V e t são as únicas variáveis da equação 2.20

Separando as variáveis em 2.20 e integrando:

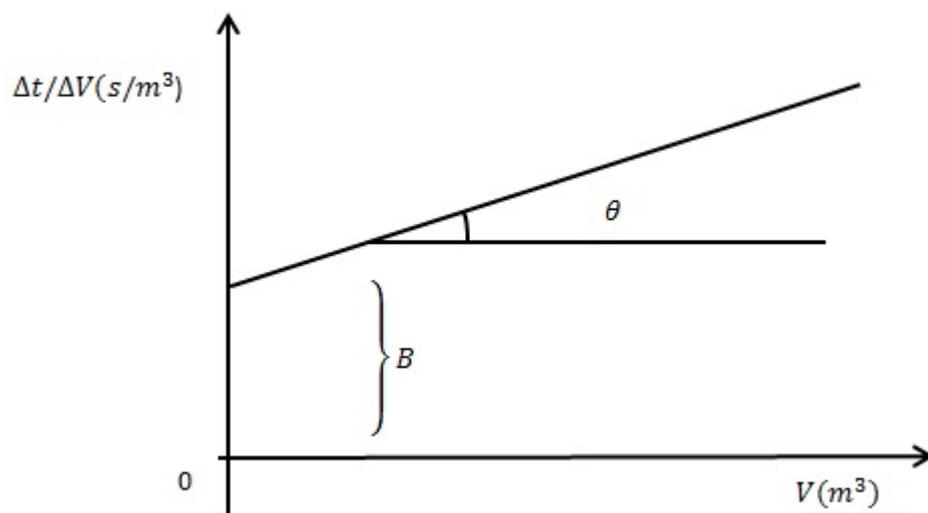
$$\int_0^t dt = \int_0^V (K_p V + B) dV \quad (2.23)$$

$$t = \frac{K_p}{2} \nu^2 + B \nu \quad (2.24)$$

Dividindo a equação 2.24 por V tem-se:

$$\frac{t}{V} = \frac{K_p}{2} \nu + B \quad (2.25)$$

Para determinar os valores de α e R_m utiliza-se a equação 2.24. Com os dados experimentais de V em vários tempos t , plota-se $\frac{\Delta t}{\Delta V} \cong \frac{dt}{dV}$ versus $V = \frac{V_1 + V_2}{2}$ e ajusta-se a melhor reta tal que $K_p = tg(\theta)$

Figura 2.1: V experimental em vários tempos

3 ESCOAMENTOS

Baseados em diferentes critérios os escoamentos de fluidos podem ser classificados em vários tipos. Pode-se ter, por exemplo, escoamentos estacionários ou permanentes que são aqueles cujas grandezas como velocidade e pressão não variam com o tempo. Caso contrário, eles são ditos transientes ou não permanentes. Uma outra classificação foi proposta nos meados do século XIX, por Reynolds [8]. Ele verificou experimentalmente a existência de dois tipos de escoamentos, o laminar e o turbulento. Escoamento laminar é idealizado como aquele no qual camadas muito finas, ou lâminas, de fluido parecem escorregar umas sobre as outras havendo somente troca de quantidade de movimento molecular. Já o escoamento turbulento é aquele no qual as partículas de fluido individuais apresentam um movimento desordenado, isto é, a velocidade apresenta componentes transversais ao movimento geral do conjunto ao fluido. Neste ponto, deve-se salientar que laminar ou turbulento não são características do fluido, mas um estado em que ele se encontra devido às condições do escoamento.

A natureza de um escoamento, isto é, se laminar ou turbulento e sua posição relativa numa escala de turbulência é indicada pelo número de Reynolds (Re). O número de Reynolds, parâmetro adimensional, é a relação entre as forças inerciais (F_i) (devido à velocidade) e as forças viscosas (F_μ), podendo ser escrita como:

$$Re = \frac{\sum F_i}{\sum F_\mu} = \frac{\rho LV}{\mu} \quad (3.1)$$

onde ρ é a densidade e μ a viscosidade do fluido. L e V são comprimentos e velocidades características do escoamento, e dependem do problema em estudo. Para dutos circulares de diâmetro D , temos:

$$Re = \frac{\rho LD}{\mu} \quad (3.2)$$

A magnitude do número de Reynolds indica a importância para o escoamento das forças inerciais ($Re > 10$) e das forças viscosas ($Re < 1$). Quando $Re \gg 1$, as forças viscosas são importantes somente nas regiões adjacentes às superfícies sólidas, devido à presença da camada limite (fina região ao redor da superfície de corpos em movimento imersos em fluido na qual o gradiente de velocidade $\frac{\partial v}{\partial t}$ normal a superfície do corpo é

significativo). De acordo com [3], não é possível definir precisamente as faixas de números de Reynolds que indicam se o escoamento é laminar, de transição ou turbulento. Nos projetos de engenharia os seguintes valores são apropriados: o escoamento num tubo é laminar se o número de Reynolds é menor que aproximadamente 2100; o escoamento é turbulento se o número de Reynolds é maior que 4000. Para números de Reynolds entre estes dois limites, o escoamento pode apresentar alternadamente e de um modo aleatório, características laminares e turbulentas (escoamento de transição).

3.1 Escoamento em Leito Fixo

O desenvolvimento de uma descrição analítica para o escoamento de um fluido é baseado nas leis físicas relacionadas com o escoamento, expressas em forma matemática adequada. As equações que descrevem o escoamento em um meio poroso ou em leito fixo serão descritas a seguir.

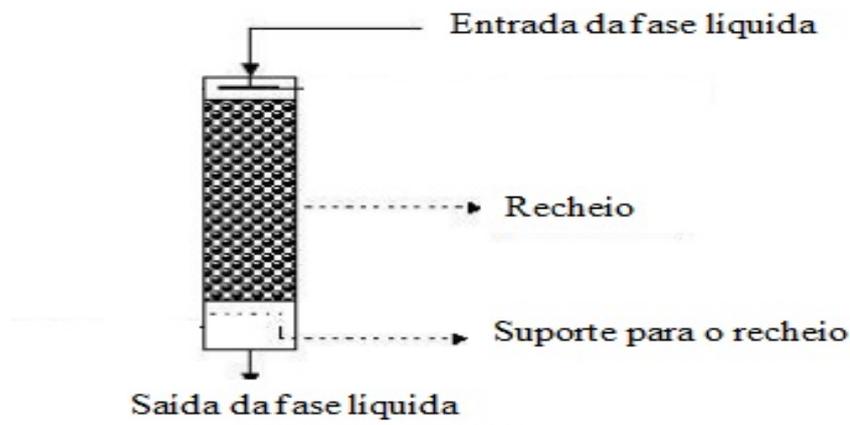


Figura 3.1: Leito fixo ou coluna de recheio

Fonte: UFSC - Depto. de Eng^a. Química - Adaptada

O primeiro trabalho experimental de escoamento em meios porosos foi feito por Darcy, em 1830, no qual constatou que para escoamentos laminares a taxa de fluxo é proporcional a queda de pressão (ΔP) e inversamente proporcional a viscosidade (μ) e ao comprimento (ΔL).

$$\nu' = \frac{q'}{A} = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta L} \quad (3.3)$$

onde ν' é a velocidade superficial, μ a viscosidade do fluido e k a permeabilidade do

material. A equação ajusta-se a baixas vazões, entretanto a complexidade do escoamento através de sólidos particulados e a diversidade de situações práticas permitiu o uso de relações previamente deduzidas para avaliar perdas por atrito em tubulações.

3.2 Escoamento em Regime Laminar

Para determinar as características do escoamento em leitos empacotados usaremos algumas relações geométricas relativas as partículas que o compõe. A porosidade (ε) em um leito empacotado é definida de acordo com a relação:

$$\varepsilon = \text{volume de vazios no leito} / \text{volume total do leito}$$

A superfície específica da partícula (a_ν) em m^{-1} e definida como:

$$a_\nu = \frac{S_p}{V_p} \quad (3.4)$$

onde S_p é a área de superfície da partícula em m^2 e V_p o volume da partícula em m^3 .

Para partículas esféricas tem-se que:

$$a_\nu = \frac{6}{D_p} \quad (3.5)$$

Considerando o diâmetro efetivo ($D_p = 6/a_\nu$) para leitos empacotados com partículas não esféricas e que a fração de volume das partículas no leito é igual a $(1 - \varepsilon)$ tem-se:

$$a = a_\nu \cdot (1 - \varepsilon) \frac{6}{D_p} \cdot (1 - \varepsilon) \quad (3.6)$$

onde a é a razão entre a superfície total do leito e o volume total do leito. A velocidade intersticial média (ν) em m/s está relacionada com a velocidade superficial ν' que considera a secção transversal do leito sem o material de empacotamento.

$$\nu' = \varepsilon \cdot \nu \quad (3.7)$$

O raio hidráulico r_H pode ser definido como a razão entre a área da seção transversal disponível para o escoamento e o perímetro molhado.

$$r_H = \frac{\text{volume de vazios} / \text{volume do leito}}{\text{superfície molhada} / \text{volume do leito}}$$

$$r_H = \frac{\text{volume de vazios disponível para o escoamento}}{\text{superfície total molhada dos sólidos}}$$

$$r_H = \frac{\varepsilon}{a} \quad (3.8)$$

Combinando as equações 3.6 e 3.8:

$$r_H = \frac{\varepsilon}{6(1-\varepsilon)} D_p \quad (3.9)$$

Uma vez que o diâmetro equivalente (D) é igual a $4 \times r_H$, o número de Reynolds para um leito empacotado, utilizando as equações 3.7 e 3.9, pode ser escrito como:

$$N_{Re} = \frac{(4r_H) \nu \rho}{\mu} = \frac{4\varepsilon}{6(1-\varepsilon)} D_p \cdot \frac{\nu' \cdot \rho}{\varepsilon \cdot \mu} = \frac{4}{6(1-\varepsilon)} \cdot \frac{D_p \nu' \rho}{\mu} \quad (3.10)$$

Para leitos empacotados Ergun, em [13] definiu o N_{Re} de acordo com a equação acima sem a fração 4/6; logo.

$$N_{Re,p} = \frac{D_p \nu' \rho}{\mu(1-\varepsilon)} \quad (3.11)$$

Para escoamento laminar podemos combinar a equação de Hagen- Poiseuille¹ que relaciona a queda de pressão com a velocidade média em tubos horizontais com as equações 3.9 e 3.7, desta forma:

$$\Delta P = \frac{32\mu\nu\Delta L}{D^2} = \frac{32\mu(\nu'/\varepsilon)\Delta L}{(4r_H)^2} = \frac{72\mu\nu'\Delta L(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 D_p^2} \quad (3.12)$$

O valor correto de ΔL é maior devido ao percurso tortuoso, e o uso de raio hidráulico prediz valores de ν' maiores. Em [9] e [13], experimentos indicam uma constante cujo valor deve ser igual a 150, resultando na equação de Blake-Kozeny para fluxo laminar, onde a porosidade $< 0,5$ e $N_{Re,p} < 10$; logo;

$$\Delta P = \frac{150\mu \cdot \nu' \Delta L}{D_p^2} \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \quad (3.13)$$

Com:

ΔP = queda de pressão no leito;

ΔL = comprimento do leito;

¹A equação $Q = \pi D^4 \Delta P / 128 \mu L$ foi derivada experimentalmente e independentemente pelo engenheiro hidráulico alemão Heinrich Ludwig Hagen (1839) e pelo médico francês Jean Louis Marie Poiseuille (1838), apud [4].

ε = porosidade ou fração de vazios;

μ = viscosidade do fluido;

ν' = velocidade superficial do fluido;

D_p = diâmetro efetivo da partícula.

3.3 Escoamento em Regime Turbulento

Para escoamento turbulento às perdas por energia cinética podem ser calculadas a partir da equação deduzida para determinar a queda de pressão em tubos.

$$\Delta P_f = 4f\rho \frac{\Delta L \nu'^2}{2D} \quad (3.14)$$

Substituído as relações para a velocidade superficial e o raio hidráulico tem-se:

$$\Delta P = 1,75 \frac{3f \cdot \rho(\nu')^2 \cdot \Delta L \cdot (1 - \varepsilon)}{D_p \cdot \varepsilon^3} \quad (3.15)$$

Considerando o escoamento turbulento o fator de fricção alcança um valor constante. Dados experimentais indicam que $3f = 1,75$. Desta forma a equação para escoamento turbulento $N_{Re} > 1000$, denominada equação de Burke-Plummer [8], e pode ser escrita da seguinte forma.

$$\Delta P = 1,75 \frac{\rho(\nu')^2 \cdot \Delta L \cdot (1 - \varepsilon)}{D_p \cdot \varepsilon^3} \quad (3.16)$$

A equação semi-empírica de Ergun, válida para os regimes Laminar e Turbulento é:

$$\frac{\Delta P}{\Delta L} = 150 \frac{\mu \nu' \cdot (1 - \varepsilon)^2}{D_p^2 \cdot \varepsilon} + 1,75 \frac{\rho(\nu')^2 \cdot (1 - \varepsilon)}{D_p \cdot \varepsilon^3} \quad (3.17)$$

O primeiro termo da equação de Ergun é predominante para o regime laminar, enquanto que o segundo tem maior importância para valores mais elevados de Reynolds, devido ao termo quadrático de velocidade superficial.

De maneira geral, pode-se descrever o comportamento de um Leito Fixo ajustando-se a forma da equação abaixo aos dados experimentais.

$$\frac{\Delta P}{\Delta L} = \alpha_1 \nu' + \alpha_2 (\nu')^n \quad (3.18)$$

A figura 4.2 ilustra a curva interpolatriz que se obtém plotando-se os dados experimentais provenientes de várias fontes com a coordenada $[(-\Delta P)g_c D_p / L \rho V_{sm}^2][\varepsilon^3(1 - \varepsilon)]$ em função do número de $N_{Re}/(1 - \varepsilon)$, mais detalhes podem ser consultados em [8].

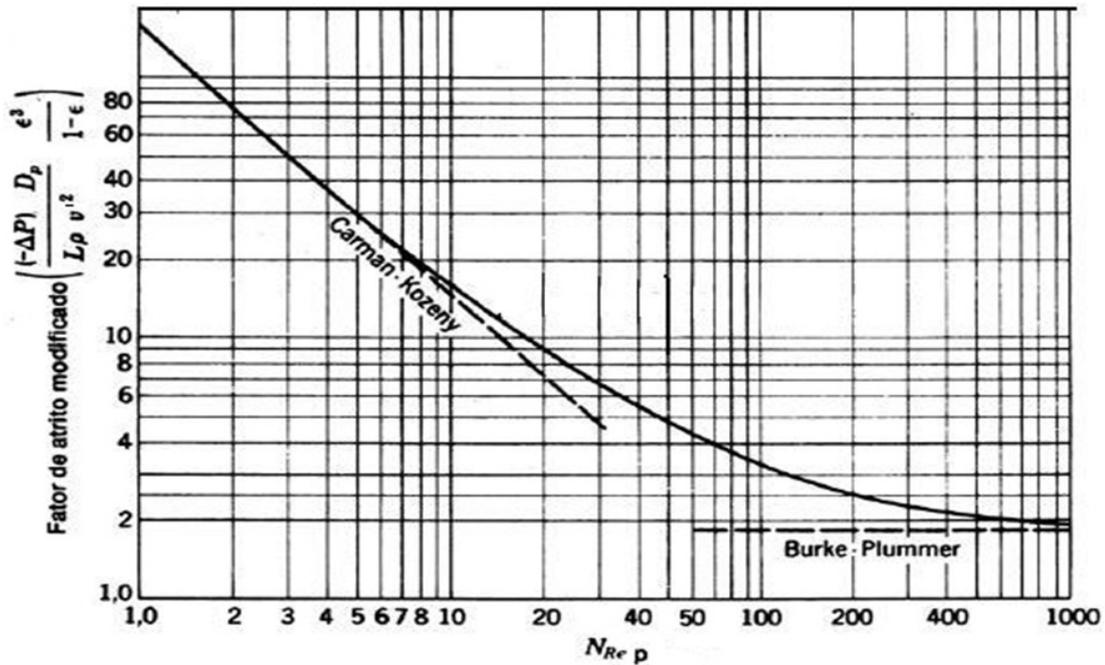


Figura 3.2: Queda de pressão no escoamento através de leitos compactos

Fonte: Foust, A. S. - Princípio de Operações Unitárias, pg.565

Existem três variáveis muito utilizadas em relação ao escoamento de um fluido que por conveniência serão definidas agora. A primeira é a vazão, que representa o volume de fluido que atravessa uma seção reta por unidade de tempo.

$$Q = \frac{dV}{dt} = A\nu \quad (3.19)$$

onde ν é a velocidade, em m/s , e A é a área, em m^2 . A segunda é a vazão mássica, ou descarga, que é a quantidade de massa de fluido que cruza uma seção reta por unidade de tempo.

$$Q_m = \frac{dm}{dt} = \rho\nu A \quad (3.20)$$

onde ρ é a massa específica, em kg/m^3 . E por último, o fluxo que representa a quantidade de uma grandeza física que cruza uma dada área por unidade de tempo.

3.4 Balanço Material

Na sua forma mais simples, o balanço de massa ou balanço material nada mais é que a contagem das unidades de massa envolvidas. A lei da conservação da massa afirma que a massa total de todas as substâncias que tomam parte num processo se mantém constante. Embora existam exceções a essa lei em reações e processos nucleares, a lei é válida para os objetivos da engenharia. [8]

$$\text{Entrada de massa} - \text{Saída de massa} = \text{Acumulação de massa} \quad (3.21)$$

Desta equação uma outra pode ser implementada através de um balanço diferencial, que é aplicável em um determinado instante do Processo. Supondo o componente A (acumulação de massa) envolvido em um processo e considerando q_e , (kg/s) e q_s (kg/s) as taxas de entrada e saída do componente através dos limites do sistema, pode-se assumir que as variáveis q_e , e q_s , podem variar com o tempo.

Pode-se então escrever o balanço para um período de tempo variando de t até $t + \Delta t$, supondo uma pequena variação de Δt onde as quantidades de q_e , e q_s , podem ser consideradas constantes. Desta forma os termos do balanço podem ser calculados:

$$\text{entra} = q_e(kg/s) \cdot \Delta t(s) \quad (3.22)$$

$$\text{sai} = q_s(kg/s) \cdot \Delta t(s) \quad (3.23)$$

Pode-se supor também que a massa de A no sistema muda em uma quantidade Δm (kg), desta forma a equação de balanço pode ser escrita como:

$$\Delta m = (q_e - q_s)\Delta t \quad (3.24)$$

Dividindo a equação por Δt e aproximando-o de zero, tem-se que a razão $\Delta m/\Delta t$ se torna a derivada de m com relação a t (dm/dt) logo, a equação pode ser escrita como:

$$\frac{dm}{dt} = q_e - q_s \quad (3.25)$$

Nesta equação geral de balanço m é a parcela da quantidade balanceada no sistema e os dois termos a direita na equação são taxas que podem variar com o tempo. Quando a densidade for constante o termo de acumulação pode escrito da seguinte forma:

$$A_{(\text{Acúmulo})} = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} \quad (3.26)$$

A equação aplicada a um sistema contínuo em estado estacionário determina que m seja constante indicando que a derivada é igual a zero, logo:

$$E - S = A_c \quad (3.27)$$

Entretanto, se qualquer termo varia com o tempo, a derivada ao lado esquerdo da equação permanece como parte da equação. Logo a equação de balanço para um sistema em estado não estacionário a um determinado instante de tempo será uma equação diferencial.

4 MODELO MATEMÁTICO E METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

Inicialmente, considerou-se o balanço material aplicado a um processo contínuo em regime estacionário nos termos da equação 3.27

$$E - S = Ac$$

A figura 4.1 ilustra o esquematicamente o processo de lixiviação em colunas. A bomba de vazão (1) injeta o fluido lixiviante, mantendo em (2) uma vazão de entrada constante. O fluido percola o leito o leito poroso em (3), a vazão de saída ocorre em (4).

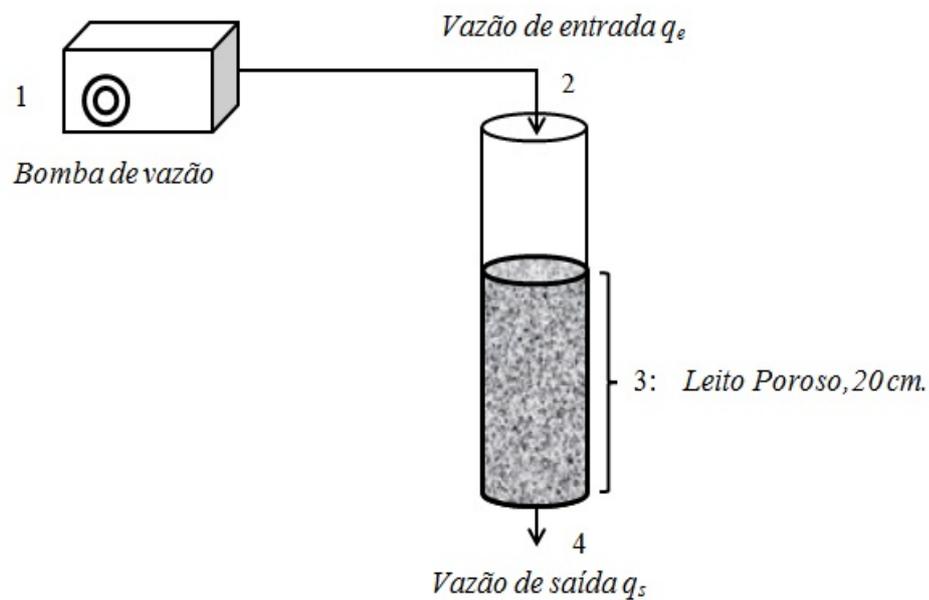


Figura 4.1: Diagrama esquemático (lixiviação em colunas)

Supondo na alimentação uma vazão de entrada $q_e(L/s)$ e densidade de corrente $\rho_e(g/L)$ tem-se:

1. Entra $(g/s) = q_e(L/s) \cdot \rho_e(g/L)$

2. Sai $(g/s) = q_s(L/s) \cdot \rho_s(g/L)$

3. Acúmulo $(g/s) = dm/dt = d(\rho_s V)/dt$

Daí:

$$\frac{d(\rho_s V)}{dt} = (q_e)(\rho_e) - (q_s)(\rho_s) \quad (4.1)$$

Resolvendo:

$$V \frac{d\rho_s}{dt} + \rho_s \frac{dV}{dt} = \rho_e q_e - \rho_s q_s \quad (4.2)$$

Considerou-se não haver variação substancial na densidade antes e após o processo, $d\rho/dt = 0$. Portanto a equação fica:

$$\rho_s \frac{dV}{dt} = \rho_e q_e - \rho_s q_s \quad (4.3)$$

Com a consideração que $\rho_e = \rho_s \Rightarrow \frac{dV}{dt} = q_e - q_s$

Ou seja: $q_e - q_s = \frac{\partial V}{\partial t}$, equivalentemente:

$$q_e - q_s = \frac{\varepsilon A \partial H(t)}{\partial t} \quad (4.4)$$

Onde ε é a porosidade do meio. Para as condições de escoamento em colunas empacotadas, é razoável considerar uma resistência para q_s . Tal resistência R é diretamente proporcional à altura H , logo:

$$q_s \cong \frac{H(t)}{R} \Rightarrow q_s = \phi \frac{H(t)}{R} \quad (4.5)$$

Substituindo 4.5 em 4.4, tem-se:

$$q_e - \phi \frac{H(t)}{R} = \frac{\varepsilon A \partial H(t)}{\partial t} \quad (4.6)$$

Aplicou-se a definição da Transformada de Laplace no segundo membro da equação 4.6, e em seguida fez-se o produto de ambos os membros da equação por $\frac{R}{\phi}$, obtém-se:

$$\frac{R}{\phi} q_e - H(t) = \frac{\varepsilon AR}{\phi} H(t) s \quad (4.7)$$

equivalente a:

$$\frac{R}{\phi} q_e = \left(\frac{\varepsilon AR}{\phi} s + 1 \right) \bar{H}(s) \quad (4.8)$$

e, em função de $\bar{H}(s)$, com q_e constante;

$$\bar{H}(s) = \frac{R/\phi}{\left(\frac{\varepsilon AR}{\phi}s + 1\right)} q_e \quad (4.9)$$

Da análise dimensional na equação 4.5, $\Rightarrow R = \frac{H}{q_s} = \frac{m}{m^3/h} = \frac{h}{m^2}$, logo o termo $AR = m^2 \cdot \frac{h}{m^2} = h$. Fez-se $h = \mathcal{L}$

A definição de Função degrau unitário permite definir a função $f(t) = a$, com $a \leq t \leq \infty \Rightarrow f(t) = \frac{a}{s}$. (perturbação passo unitário)

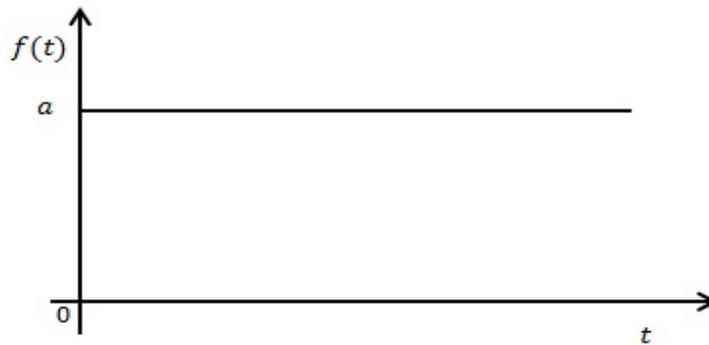


Figura 4.2: Função passo unitário

Substituiu-se $\frac{a}{s} = q_e$ e $AR = \mathcal{L}$ na equação 4.9, então:

$$\bar{H}(s) = \frac{R/\phi}{\left(\frac{\varepsilon \mathcal{L}}{\phi}s + 1\right)} \cdot \frac{a}{s} \quad (4.10)$$

equivalente a:

$$\bar{H}(s) = \frac{aR}{\phi} \cdot \left(\frac{1}{s\left(\frac{\varepsilon \mathcal{L}}{\phi}s + 1\right)} \right) \quad (4.11)$$

donde,

$$\bar{H}(s) = \frac{aR}{\varepsilon \mathcal{L}} \cdot \left(\frac{1}{s\left(s + \frac{\phi}{\varepsilon \mathcal{L}}\right)} \right) \quad (4.12)$$

onde $\bar{H}(s)$ é função de t no domínio da frequência.

Aplicou-se a linearidade da Transformada de Laplace. A finalidade é fazer a conversão da função $\bar{H}(s)$ para uma forma já conhecida. Assim:

$$\bar{H}(s) = \frac{aR}{\varepsilon \mathcal{L}} \left(\frac{\varepsilon \mathcal{L}}{\phi} \left(1 - e^{-\frac{\phi}{\varepsilon \mathcal{L}}t} \right) \right) \quad (4.13)$$

Com $a = \frac{\phi}{\varepsilon \mathcal{L}}$, $\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\varepsilon \mathcal{L}}{\phi}$, simplificando 4.13

$$\bar{H}(s) = \frac{aR}{\varepsilon \mathcal{L}} \left(\frac{\varepsilon \mathcal{L}}{\phi} \left(1 - e^{-\frac{\phi}{\varepsilon \mathcal{L}} t} \right) \right) \quad (4.14)$$

obtem-se a função $\bar{H}(s)$ no domínio do tempo.

$$\bar{H}(s) = \frac{aR}{\phi} \left(1 - e^{-\frac{\phi}{\varepsilon \mathcal{L}} t} \right) \quad (4.15)$$

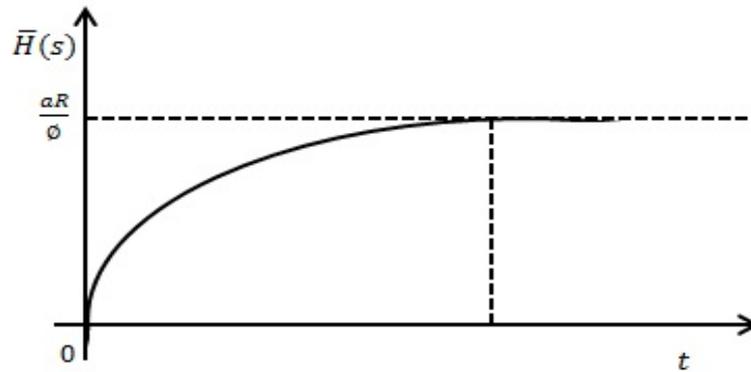


Figura 4.3: $\bar{H}(s)$ no domínio do tempo

$\bar{H}(s)$ no domínio do tempo, quando $t = 0 \Rightarrow \bar{H}(s) = 0$ e para $t = \infty \Rightarrow \bar{H}(s) = \frac{aR}{\phi}$

5 Estimativa das Equações de Regressão

Tomou-se a equação 4.15 que representa a altura do fluido na coluna em função do tempo t . Aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação, fica:

$$\ln(\bar{H}(s)) = \ln \frac{aR}{\phi} + bx \quad (5.1)$$

Onde $bx = \ln \left(1 - e^{-\frac{\phi}{\epsilon Z} t} \right)$. E o problema original de encontrar o ajuste¹ do conjunto de valores da tabela 5.1 para a função 4.15 passa a ser o problema de ajuste linear do conjunto de dados $\{\{x_i, \ln f_i\}\}_{i=1}^n$.

Os dados práticos utilizados para estimar as equações de regressão foram obtidos no Trabalho de Conclusão de curso (TCC) de Ferraz Neto, W. S. Disponível em [7], e estão ilustrados na tabela 6.1. As colunas: *britado + aglomerado*, *britado e aglomerado*, ilustram os dados obtidos diretamente na coluna de extração mineral. Onde: V = vazão de saída, H = altura do fluido na coluna e T = tempo.

As equações de regressão foram estimadas por análise de regressão linear no aplicativo Minitab 16. Seguem:

Aglomerado + Britado:

$$\ln(h) = 2,71 + 0,00241x \quad (5.2)$$

tomando o antilogaritmo nas constantes:

$$\ln(h) = 15,48 + 1,00241x \quad (5.3)$$

Britado:

$$\ln(h) = 2,59 + 0,00421x \quad (5.4)$$

tomando o antilogaritmo nas constantes:

$$\ln(h) = 13,330 + 1,00428x \quad (5.5)$$

¹Os dados para ajuste são $\{\{x_i, f_i\}\}_{i=1}^n$, onde o conjunto $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ é utilizado para definir o produto interno $(\cdot, \cdot)_x$. Se f for conhecida, $f_i \equiv f(x_i)$, caso contrário f_i é um dado de entrada no problema de ajuste.

Aglomerado:

$$\ln(h) = 2,231 + 0,0155x \quad (5.6)$$

tomando o antilogaritmo nas constantes:

$$\ln(h) = 9,31 + 1,0156x \quad (5.7)$$

Verificou-se nos resultados, que ao se confrontar os dados práticos com a equação 4.15 haveria a necessidade de se introduzir uma constante de ajuste.

Tabela 5.1: Dados experimentais: vazão, altura na coluna e tempo

Brit. + Aglo.			Britado			Aglomerado		
V	H	T	V	H	T	V	H	T
0.8	4.00	6.00	0.3	4.00	5.00	4.2	4.00	6.00
1.3	8.00	8.00	1.3	8.00	7.00	4.2	8.00	7.00
1.6	12.0	9.00	1.7	12.0	8.00	4.2	12.0	8.00
1.1	16.0	10.0	2.4	16.0	11.0	4.2	16.0	9.00
0.2	20.0	11.0	2.6	20.0	13.0	0.4	20.0	23.0
1.8	26.3	21.0	3.1	24.0	23.0	0.5	21.5	33.0
2.3	29.0	31.0	3.4	24.5	33.0	0.3	22.5	43.0
2.4	28.3	41.0	3.3	24.3	42.0	0.3	22.9	53.0
2.7	28.5	51.0	3.0	23.8	62.0	0.3	23.4	63.0
2.3	23.5	71.0	2.9	22.5	82.0	0.1	24.0	83.0
2.1	22.5	91.0	2.4	21.4	102	0.1	24.0	103
2.1	22.8	111	2.3	20.0	122	-	-	-
2.0	22.0	131	2.3	20.7	142	-	-	-
2.0	21.5	151	2.3	20.0	162	-	-	-
2.0	20.5	171	-	-	-	-	-	-
2.0	20.3	191	-	-	-	-	-	-
2.0	20.0	211	-	-	-	-	-	-

Fonte: Ferraz Neto, W. S. (2013)

Os coeficientes da equação 4.15, foram obtidos através da relação linear que há entre os coeficientes das equações de regressão e as coordenadas de seus pontos.

A saber;

1. Aglomerado + Britado

$$\text{Da equação 5.3 vem; } 15,48 \cdot \frac{aR}{\phi} = 20 \Rightarrow \frac{aR}{\phi} = 1,29199$$

$$\Rightarrow \frac{\phi}{\epsilon \mathcal{L}} = 1,00241$$

2. Britado

$$\text{Da equação 5.5 vem; } 13,330 \cdot \frac{aR}{\phi} = 20 \Rightarrow \frac{aR}{\phi} = 1,50037$$

$$\Rightarrow \frac{\phi}{\epsilon \mathcal{L}} = 1,00428$$

3. Aglomerado

$$\text{Analogamente, da equação 5.7 vem; } 9,31 \cdot \frac{aR}{\phi} = 24 \Rightarrow \frac{aR}{\phi} = 2,57787$$

$$\Rightarrow \frac{\phi}{\epsilon \mathcal{L}} = 1,0156$$

5.1 Cálculo das Constantes do Modelo

O módulo de coluna utilizado possui 10 cm. de diâmetro interno, logo sua área $A = 0,00785m^2$. Sabe-se que $AR = h = \mathcal{L}$, então:

1. Aglomerado + Britado. Para uma altura $h = 0,20m$. e $\epsilon = 0,5$;

$$AR = h \Rightarrow R = 25,478m^{-1} \text{ e } \mathcal{L} = 0,20m$$

$$\frac{\phi}{\epsilon \mathcal{L}} = 1,00241 \Rightarrow \phi = 0,10024m$$

$$\frac{aR}{\phi} = 1,29199 \Rightarrow a = 0,00508m^2$$

2. Britado. Para uma altura $h = 0,20m$. e $\epsilon = 0,5$;

$$AR = h \Rightarrow R = 25,478m^{-1} \text{ e } \mathcal{L} = 0,20m$$

$$\frac{\phi}{\epsilon \mathcal{L}} = 1,00428 \Rightarrow \phi = 0,10043m$$

$$\frac{aR}{\phi} = 1,50037 \Rightarrow a = 0,0059m^2$$

3. Aglomerado. Para uma altura $h = 0,24m$. e $\epsilon = 0,52$;

$$AR = h \Rightarrow R = 30,573m^{-1} \text{ e } \mathcal{L} = 0,24m$$

$$\frac{\phi}{\epsilon \mathcal{L}} = 1,0156 \Rightarrow \phi = 0,12675m$$

$$\frac{aR}{\phi} = 2,57787 \Rightarrow a = 0,01068m^2$$

5.2 Resultados e Discussões

Em virtude dos valores alcançados para as constantes realizou-se a comparação entre as curvas práticas e as curvas teóricas. Nas figuras 5.1, 5.2 e 5.3, pode-se observar claramente um padrão de comportamento entre as curvas teóricas e práticas. A curva teórica diverge da prática diretamente na sua imagem (Transformação de translação em relação à altura). Observa-se um comportamento constante a partir de $t = 25$ minutos, aproximadamente.

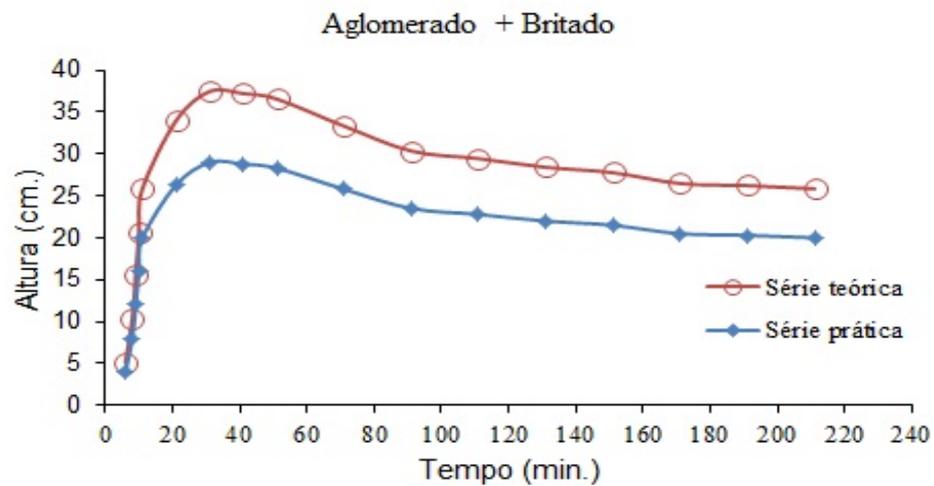


Figura 5.1: Curva Transladada (Aglomerado + Britado)

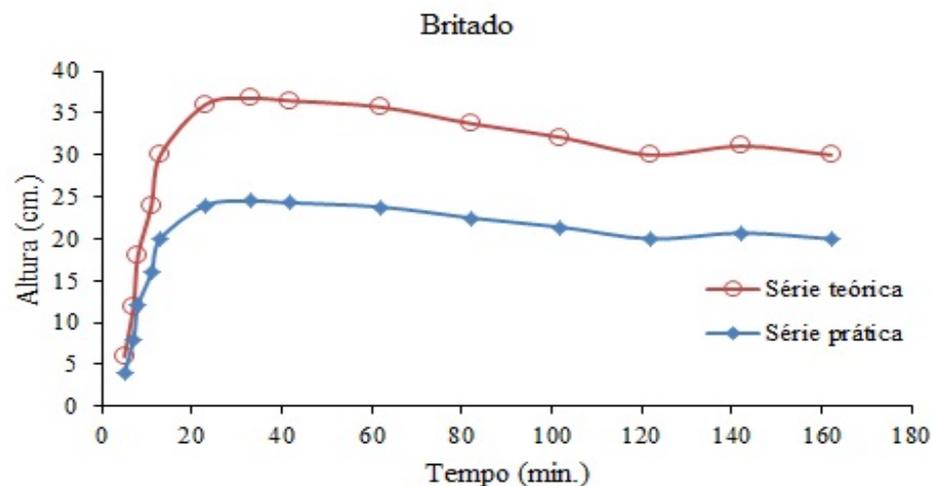


Figura 5.2: Curva Transladada (Britado)

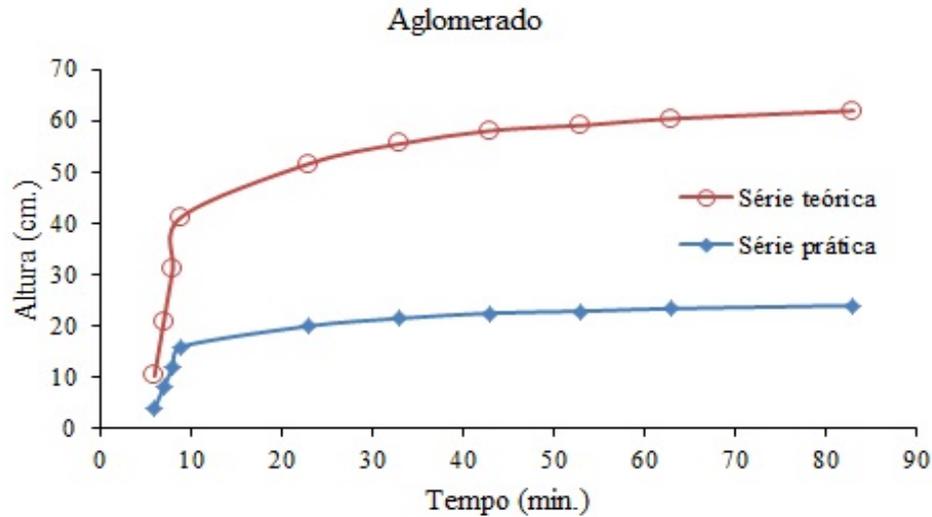


Figura 5.3: Curva Transladada (Aglomerado)

Frente ao comportamento transladado na curva, Surgiram perguntas. Como adicionar uma constante de ajuste na equação? Qual seria o critério para definir adequadamente essa constante? Na busca às respostas, observou-se o surgimento de uma razão aproximadamente constante ente as imagens dessas funções.

Nota-se uma transformação de translação dos pontos das três curvas em relação a coordenada y (Altura de líquido na coluna). Isto é um indicador de que há um fator de transformação no gráfico. Portanto, determinando este fator ou a inversa dessa transformação determina-se o parâmetro necessário ao ajuste dos pontos do gráfico.

O ajuste , em cada situação foi calculado da seguinte maneira:

$$\lambda = \frac{y}{y'}$$

para quaisquer pontos da forma $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_1; y_2)$, onde y e y' são respectivamente imagens das séries teóricas e práticas. Dessa forma, λ em cada experimento é:

1. Aglomerado + Britado

$$\lambda = \frac{y}{y'} = 0,774 \Rightarrow \frac{aR}{\phi} \cdot \lambda = 0,99923$$

2. Britado

$$\lambda = \frac{y}{y'} = 0,666 \Rightarrow \frac{aR}{\phi} \cdot \lambda = 0,99926$$

3. Aglomerado

$$\lambda = \frac{y}{y'} = 0,387 \Rightarrow \frac{aR}{\phi} \cdot \lambda = 0,99984$$

Desta maneira, para os pontos P_1, P_2, \dots, P_n da tabela 5.1 tem-se abaixo, em forma gráfica, os seguintes resultados ajustados com $\lambda = 0,774, 0,666$ e $0,387$, para os materiais aglomerado + britado, britado e o aglomerado, respectivamente.

As figuras 5.4, 5.5 e 5.6 ilustra a concordância entre as séries prática e teórica, quando multiplica-se o termo $\frac{aR}{\phi}$ pelos valores determinados para λ

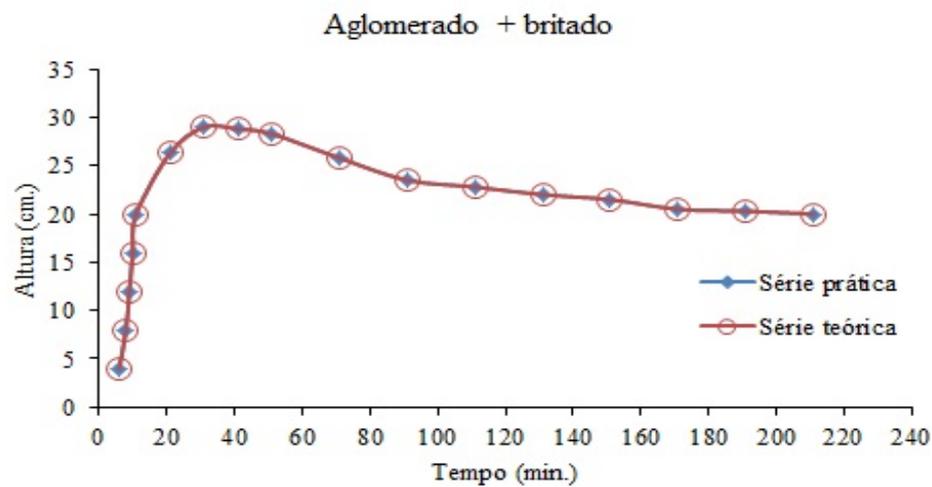


Figura 5.4: Curva ajustada (Aglomerado + Britado)

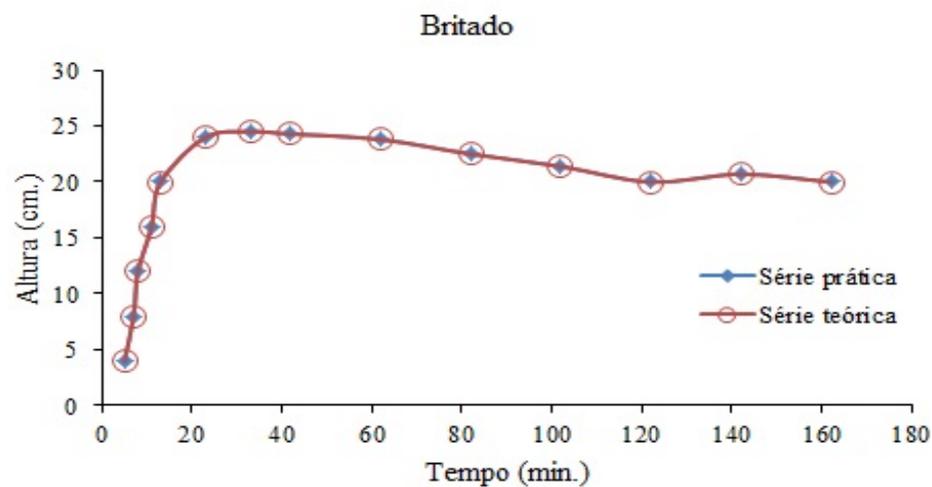


Figura 5.5: Curva ajustada (Britado)

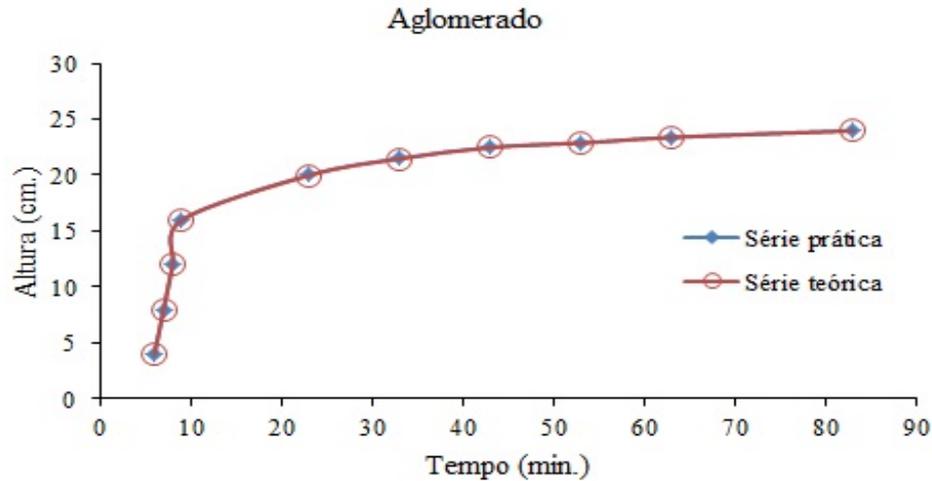


Figura 5.6: Curva ajustada (Aglomerado)

A tabela 5.2, ilustra os resultados dos ensaios de escoamento em coluna realizados em 21/03/2013 por B. S. Mosso e K. S. Santos, alunos do Curso de Engenharia de Minas e Meio Ambiente 2010 - UFPA, Campus de Marabá. Com esses dados, o modelo foi mais uma vez testado.

Tabela 5.2: Variação de altura da água ao longo do tempo (Britado)

tempo (min.)	5.00	8.00	12.0	17.0	23.0	34.0	44.0	54.0	64.0	84.0
Altura (cm.)	4.00	8.00	12.0	16.0	20.0	21.5	22.0	22.5	22.8	22.5
tempo (min.)	104	124	144	164	184	204	224	244	264	-
Altura (cm.)	22.4	22.0	21.2	19.5	19.0	18.5	18.1	17.3	17.6	-

Fonte: B. S. Mosso e K. S. Santos

A equação de regressão estimada foi:

$$\ln(h) = 2,66 + 0,00170x \quad (5.8)$$

tomando o antilogaritmo nas constantes

$$\ln(h) = 14,296 + 1,00170x \quad (5.9)$$

Da equação 5.9 vem; $14,296 \cdot \frac{aR}{\phi} = 17,6 \Rightarrow \frac{aR}{\phi} = 1,231$ e $\frac{\phi}{cZ} = 1,00170$

Com $\lambda = \frac{y}{y'} = 0,8123$. A figura 5.10 ilustra graficamente o resultado desse ensaio. Observa-se novamente a concordância entre a curva experimental e a curva teórica.

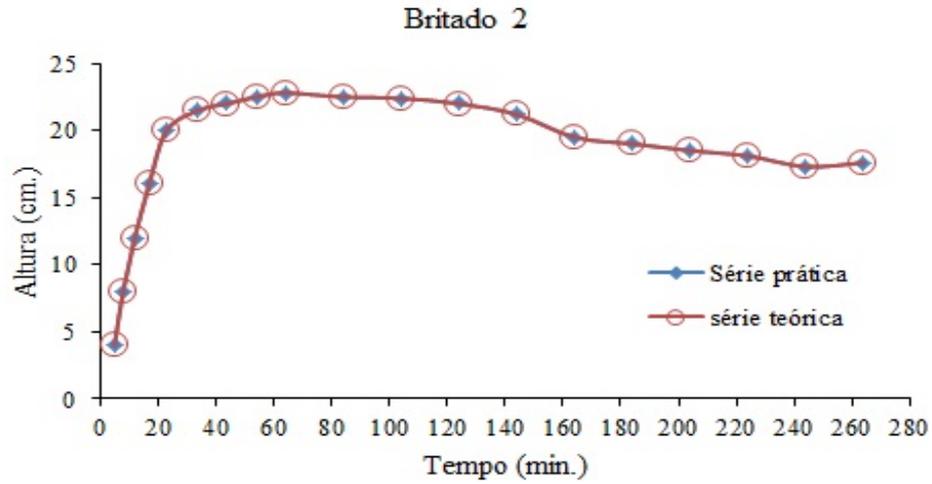


Figura 5.7: Altura de fluido no tempo, minério britado



Figura 5.8: Coluna com as camadas medidas

Fonte: Mosso e Santos (2013)

No período compreendido entre 11/2011 a 07/2012, com o apoio PIBIC/UFPA, foram realizados no laboratório de Hidro e Eletrometalurgia uma série de ensaios em colunas e tanques agitados, visando a otimização da lixiviação do minério oxidado [12]. Desses ensaios, em particular do ensaio em colunas reproduziu-se a tabela 5.3. O objetivo foi mais uma vez verificar a capacidade de modelagem da equação 4.15 em colunas de extração.

Tabela 5.3: Variação de altura da água ao longo do tempo

tempo (min.)	5.0	10	15	20	25	34	40
Altura (cm.)	-	-	4.00	6.90	12.0	14.0	17.0
tempo (min.)	46	50	55	60	75	89	92
Altura (cm.)	19.0	19.5	19.8	20.0	20.0	19.5	19.5

Fonte: Maia, L. C. pg. 9, (2012)

Para este ensaio a equação regressão encontrada foi:

$$\ln(h) = 1,93 + 0,0149x \quad (5.10)$$

tomando o antilogaritmo nas constantes

$$\ln(h) = 6,89 + 1,0150x \quad (5.11)$$

Da equação 5.11 vem; $6,89 \cdot \frac{aR}{\phi} = 19,5 \Rightarrow \frac{aR}{\phi} = 2,83$

$$\Rightarrow \frac{\phi}{\epsilon \mathcal{L}} = 1,050$$

Aplicando na equação 4.15, com o parâmetro de ajuste variando em $t = 25$, $t = 40$ e $t = 50$, para os valores $\lambda = 1,78$, $\lambda = 2,19$ e $\lambda = 2,32$, têm-se a curva que representa o escoamento na coluna de extração com pontos de descontinuidades isolados.

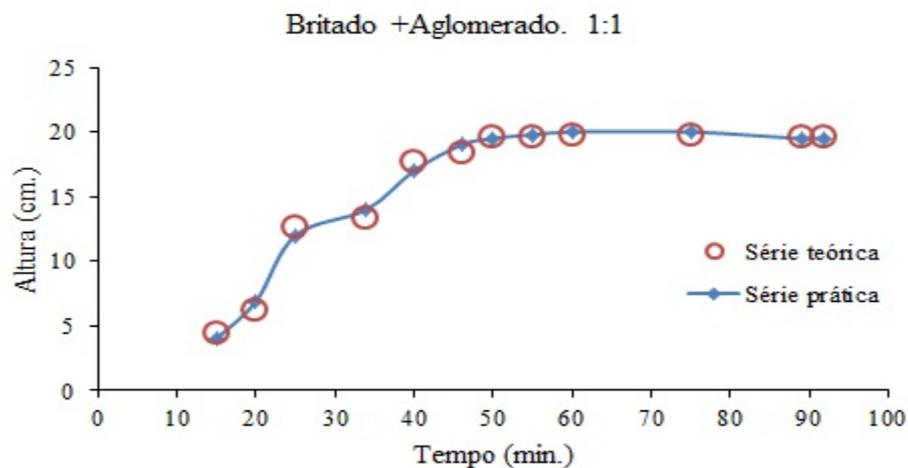


Figura 5.9: Curva com pontos de descontinuidades

A forte semelhança entre as curvas ilustradas na figura 5.9 mostra que o modelo apresenta uniformidade frente os ensaios realizados por [12]. Porém, a variação observada

para λ evidencia comportamentos distintos em diferentes tempos t . Notadamente, entre os primeiros 25 minutos do experimento. Neste intervalo o modelo pode ser ajustado se fizermos $L(t) = \lambda$, com $L(t)$ a ser determinada. Assim:

$$\bar{H}(s) = \frac{aR}{\phi} \lambda \left(1 - e^{-\frac{\phi}{\epsilon \mathcal{L}} t}\right) \quad (5.12)$$

A figura 5.10 ilustra a região que representa a função $L(t)$.

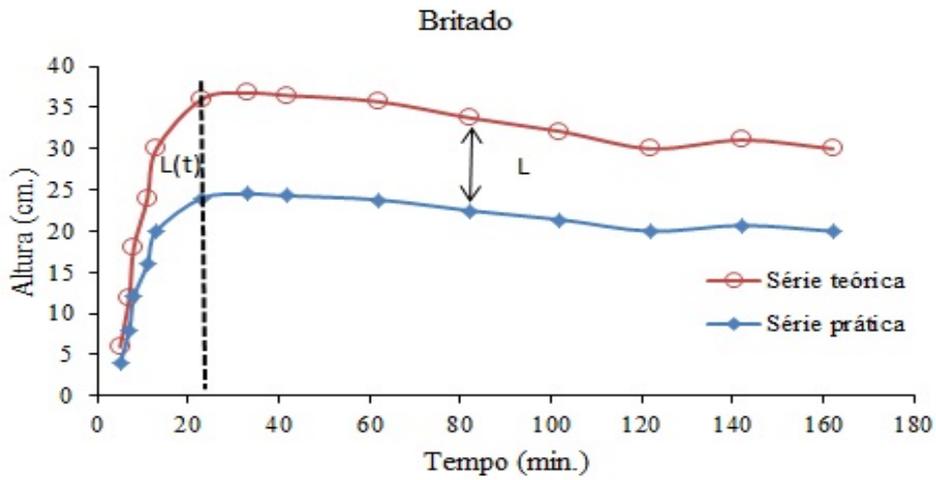


Figura 5.10: Curva com a região que representa a função $L(t)$

6 CONCLUSÃO

Conhecer os aspectos operacionais da coluna de lixiviação permite que se tenha o controle de parâmetros importantes nos ensaios de lixiviação, como a altura de fluido na coluna e o tempo de contato entre o agente lixivante e minério.

Para que a lixiviação seja eficiente, é necessário que o agente lixivante permaneça em contato, por um tempo determinado, com todas as partículas de minério. Esta eficiência pode ser facilmente atingida se houver uma ferramenta capaz de prever o tempo necessário, e o correspondente controle na altura de fluido presente na coluna. As curvas teóricas apresentadas neste trabalho valida o modelo proposto. Este, por sua vez, mostrou ser uma ferramenta capaz de fazer o controle de altura do fluido na coluna de lixiviação, sua capacidade de modelagem e controle de altura do fluido permite fazer previsões quanto ao tempo mínimo necessário para que ocorra a saturação do meio lixivante, seja diretamente no modelo ou, de acordo com a ocasião, e de forma prática, em sua equação de regressão. Desta forma, a utilização da equação 5.12, poderá ser adotada no controle de vazão em colunas de extração mineral.

Durante o processo de lixiviação há a necessidade de se fazer ajustes pontuais na vazão de entrada, para evitar transbordo. Esta é uma medida de controle, sua utilização no decorrer do processo faz a vazão de saída variar com o tempo até atingir o equilíbrio, este ocorre quando a vazão de saída aproxima-se ou iguala-se do valor de entrada.

A relevância deste estudo se deve a possibilidade de se vislumbrar novos horizontes na produção de cobre via lixiviação em colunas, através do aproveitamento do minério de cobre oxidado, que hoje é estocado por se considerado estéril.

Esses resultados servirão de base para no futuro aprofundarem-se os estudos de lixiviação em colunas, e o posterior dimensionamento de colunas e circuitos de colunas de lixiviação. Deve-se levar em consideração a concentração de cobre no licor resultante do processo, pois neste estudo não se considerou esta variável, ao invés do uso de ácido usou-se água, o ideal seria submeter o minério de cobre oxidado à lixiviação com ácido sulfúrico (H_2SO_4). Esta é uma recomendação a ser considerada em trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] Araújo, C. A. O. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro: **Estudo da Filtração Cruzada em Geometria Cilíndrica**. 2010, 91 f. Dissertação (Mestrado).
- [2] Braga, A. L. C.; R. N. C. Junior; R. S. de Paiva.; S. B. do Vale **Estudo do Comportamento do Minério de Teor Relativamente Alto de Cobre Oxidado de Canaã dos Carajás Submetido à Lixiviação com H_2SO_4** . XXIV ENTMME-2011. Salvador/ Bahia.
- [3] Bruce R. Munson, Donald F. Young; **Fundamentos da Mecânica dos Fluidos**. 4ª ed. São Paulo: Edigard Blücher, 2004. 582 P.
- [4] Brunetti, Franco. **Mecânica dos fluidos**. 2ª ed. rev. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. 420 p.
- [5] Edwards, C.H. Jr.; David, E. Penney. **Equações Diferenciais Elementares; "com problemas de contorno"**. 3ª ed. Rio de Janeiro: PHB, 1995. 643 p.
- [6] Farina, E. **Modelos Matemáticos de Sistemas Dinâmicos: Notas de Aulas**. Erechim, 2006. Trabalho não publicado.
- [7] Ferraz Neto, W. S.; **Levantamento de Parâmetros Físicos em Colunas de Extração Mineral** TCC (Graduação em Engenharia de Minas e Meio Ambiente) - Universidade Federal do Pará, Faculdade de Eng^a. de Minas e Meio Ambiente, Marabá, 2013.
- [8] Foust, A. S. et al. **Princípios das Operações Unitárias**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1982. 670 p.
- [9] Geankoplis, C. J.; **Procesos de Transporte y operaciones unitárias**. 3ª ed. México: Compañia Editorial Continental, 1998. 999 p.
- [10] Gomide, R. **Operações Unitárias**: Ed Cenpro. V4. São Paulo, 1988.

-
- [11] Gomide, R. **Operações Unitárias: Fluídos na Indústria**. V2. São Paulo, 1988.
- [12] Maia, L. C. **Otimização da Lixiviação do Minério Oxidado de Canaã dos Carajás: Ensaio em Coluna, Tanques Agitados**. Relatório Técnico Científico. PIBIC/UFGA. Marabá, 2012. Trabalho não publicado
- [13] Massarani, G.; **Fluidodinâmica em Sistemas Particulados**. 2^a ed. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 2001. 151 P.
- [14] Sodré, U. **Modelos Matemáticos**: Notas de Aulas. Londrina, 2007. Trabalho não publicado.