

FABRÍCIO MACÊDO BARROS

**Introdução à Relatividade Geral e à Solução
Numérica de Modelos para Estrelas Politrópicas**

Marabá-PA

2017, Dezembro

FABRÍCIO MACÊDO BARROS

Introdução à Relatividade Geral e à Solução Numérica de Modelos para Estrelas Politrópicas

Trabalho apresentado à Faculdade de Física como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Física pela Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará.

Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará – UNIFESSPA

Faculdade de Física

Instituto de Ciências Exatas

Orientador: Prof. Dr. Tiago Carvalho Martins

Marabá-PA

2017, Dezembro

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Josineide da Silva Tavares da UNIFESSPA. Marabá, PA

Barros, Fabrício Macêdo

Introdução à relatividade geral e à solução numérica de modelos para estrelas politrópicas / Fabrício Macêdo Barros; orientador, Tiago Carvalho Martins. — 2017.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Campus Universitário de Marabá, Instituto de Ciências Exatas, Faculdade de Física, Curso de Física, Marabá, 2017.

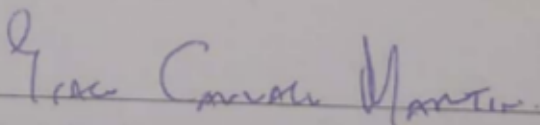
1. Física – Estudos e ensino. 2. Relatividade geral (Física). 3. Modelos matemáticos. I. Martins, Tarciso Silva de, orient. II. Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará. III. Título.

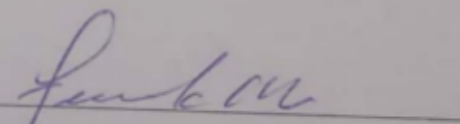
CDD: 22. ed.: 530.07

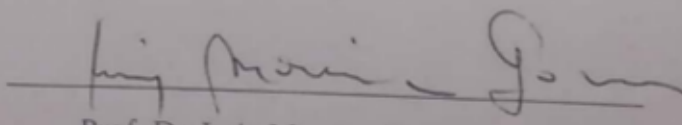
SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
FACULDADE DE LICENCIATURA EM FÍSICA

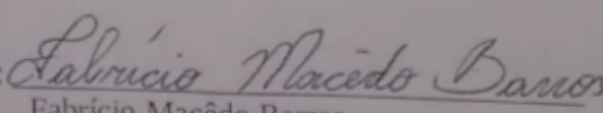
ATA DA APRESENTAÇÃO E DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE
CURSO - TCC

ATA DA SESSÃO DE APRESENTAÇÃO E DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO PARA CONCESSÃO DE GRAU DE LICENCIADO PLENO EM FÍSICA, REALIZADA ÀS 11:30 HORAS DO DIA 23 DE DEZEMBRO DE 2017, NA SALA 12 DO PRÉDIO DA FÍSICA, CAMPUS II, INTITULADA: "INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE GERAL E À SOLUÇÃO NUMÉRICA DE MODELOS PARA ESTRELAS POLITRÓPICAS". FOI APRESENTADA DURANTE 30 MINUTOS PELO DISCENTE FABRÍCIO MACÊDO BARROS, MATRÍCULA 201240104005 DIANTE DA BANCA EXAMINADORA APROVADA PELA FACULDADE DE FÍSICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ, ASSIM CONSTITUÍDA: TIAGO CARVALHO MARTINS (ORIENTADOR - UNIFESSPA), LUIZ MOREIRA GOMES, FERNANDA CARLA LIMA FERREIRA. EM SEGUIDA, O CANDIDATO FOI SUBMETIDO À ARGÜIÇÃO, TENDO DEMONSTRADO CONHECIMENTOS NO TEMA OBJETO DA PROPOSTA DE TCC, FAVORECENDO À BANCA EXAMINADORA APRESENTAR CONTRIBUIÇÕES PARA O DESENVOLVIMENTO DO TCC E DECIDIR PELO CONCEITO EXCELENTE DO MESMO, E CONCEDER O PRAZO MÁXIMO DE 15 DIAS PARA SEREM EFETUADAS AS MODIFICAÇÕES SUGERIDAS PELA BANCA, SE FOR O CASO, E EM SEGUIDA A MESMA SERÁ ASSINADA POR TODOS OS MEMBROS. PARA CONSTAR FORAM LAVRADOS OS TERMOS DA PRESENTE ATA, QUE LIDA E APROVADA RECEBE A ASSINATURA DOS INTEGRANTES DA BANCA EXAMINADORA E DO CANDIDATO.

PRESIDENTE: 
Prof. Dr. Tiago Carvalho Martins

MEMBROS: 
Prof. Dr.ª Fernanda Carla Lima Ferreira


Prof. Dr. Luiz Moreira Gomes

CANDIDATO(A): 
Fabrício Macêdo Barros

*Dedico este trabalho aos meus pais
Orlando de Oliveira Barros e Inatelma
Macêdo Pinheiro pela educação e a minha
namorada Alexandra Macêdo dos Santos pela
motivação.*

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus por ter me guiado e iluminado o meu caminho ao longo desses anos.

Ao Prof. Dr. Tiago Carvalho Martins por seu braço amigo e por seu desprendimento, quando mesmo em seu estreitado tempo disponível, encontrou mais tempo para me orientar, tornando-se fundamental para elaboração deste trabalho.

A toda a minha família pelo apoio em especial aos meus irmãos Camila Barros Bezerra pelo grande incentivo e Jessé Macêdo Barros que indiretamente tornou essa conquista possível.

Aos meus familiares Jair Broni, Elaine Broni, Eli Broni e Raimundo Meireles Broni, que me ampararam em sua casa no início dessa carreira.

As minhas colegas de curso e de quarto Sayena Mirelle Santos de Jesus e Flávia Machado de Souza, que dividiram comigo despesas, conversas, conhecimentos e acima de tudo as suas amizades que levarei para sempre comigo.

A todos os meus colegas da turma que dividiram comigo todas as lutas.

*“O que sabemos é uma gota; o que
ignoramos é um oceano.”
(Isaac Newton)*

Resumo

O objetivo deste trabalho é desenvolver programas para modelar estrelas politrópicas relativistas e não-relativistas, usando o método Runge-Kutta-Fehlberg. Foi apresentado um material introdutório de relatividade geral conciso e acessível para estudantes dos últimos anos de licenciado em física. Foi desenvolvida uma solução detalhada das equações de campo de Einstein para uma distribuição de matéria-energia estática e esfericamente simétrica, dando origem à equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. A implementação do método Runge-Kutta-Fehlberg na solução dos modelos para estrelas politrópicas relativistas e não-relativistas foi mostrada em detalhes. Simulações do modelo de estrela politrópica não-relativística para índices politrópicos $n = 0$, $n = 1$, $n = 3$, e $n = 5$ foram comparados com resultados da literatura. Simulações do modelo de estrela politrópica relativística para índices politrópicos $n = 0.1$, $n = 0.2$, $n = 0.3$, $n = 0.4$, $n = 0.5$, $n = 0.6$, $n = 0.7$, $n = 0.8$, $n = 0.9$, $n = 1.0$ e $n = 3.0$ foram comparados com resultados da literatura. Sistemas de equações diferenciais dos modelos de estrelas politrópicas relativísticas e não-relativísticas, para índice politrópico $n = 1.5$, $K = 5.3802 \times 10^3 Nm^3/kg^{5/3}$ e densidade central ρ_c variando de $1 \times 10^{16} Kg/m^3$ a $1 \times 10^{20} Kg/m^3$ foram solucionados via método de Runge-Kutta-Fehlberg com passo espacial máximo de $hmax = 1 \times 10^{-5}$, passo espacial mínimo de $hmin = 1 \times 10^{-15}$ e tolerância $tol = 1 \times 10^{-6}$.

Palavras-chaves: Método Runge-Kutta-Fehlberg. Relatividade Geral. Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Estrelas Politrópicas.

Abstract

The objective of this work is to develop programs to model relativistic and non-relativistic polytropic stars, using the Runge-Kutta-Fehlberg method. A concise and accessible general relativity introductory material for students of the last years of licentiate in physics was presented. It was developed a detailed solution of the field equations of Einstein to an matter-energy distribution of static and spherically symmetric, giving rise to the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation. The implementation of the Runge-Kutta-Fehlberg method in the solution of the models for relativistic and non-relativistic polytropics stars was showed in details. Simulations of the non-relativistic polytropic star model for polytropic indexes $n = 0$, $n = 1$, $n = 3$, and $n = 5$ were compared to literature results. Simulations of the relativistic polytropic star model for polytropic indexes $n = 0.1$, $n = 0.2$, $n = 0.3$, $n = 0.4$, $n = 0.5$, $n = 0.6$, $n = 0.7$, $n = 0.8$, $n = 0.9$, $n = 1$ and $n = 3$ were compared with results from the literature. Systems of differential equations of the relativistic and non-relativistic polytropic star models for polytropic index $n = 1.5$, $K = 5.3802 \times 10^3 Nm^3/kg^{5/3}$ and central density ranging from $1 \times 10^{16} kg/m^3$ to $1 \times 10^{20} kg/m^3$ were solved by Runge-Kutta-Fehlberg method with maximum space step of $h_{max} = 1 \times 10^{-5}$, space step minimum of $h_{min} = 1 \times 10^{-15}$ and tolerance of $tol = 1 \times 10^{-6}$.

Key-words: Runge-Kutta-Fehlberg method. General Relativity. Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation. Polytropic stars.

Lista de ilustrações

Figura 1 – A partir do programa desenvolvido para a solução do modelo de estrela politrópica não-relativística pelo método de Runge-Kutta-Fehlberg, os resultados obtidos foram comparados com aqueles fornecidos pelas soluções analíticas, existentes para os casos $n = 0$, $n = 1$ e $n = 5$, disponíveis na referência (MACIEL, 1999), e para o caso $n = 3$, sem solução analítica, mas com resultados apresentados na página 91 da mesma referência, os quais foram extraídos através do programa xyscan (http://rhig.physics.yale.edu/ullrich/software/xyscan/)	61
Figura 2 – Raio e massa para uma estrela politrópica com $n = 1$ para $K = 2.06 \times 10^7 Nm^4/kg^2$ e $\rho_C = 4640.0kg/m^3$	62
Figura 3 – Raio e massa para uma estrela politrópica com $n = 1$ para $K = 3.84 \times 10^9 Nm^2/kg^{4/3}$ e $\rho_C = 76400.0kg/m^3$	62
Figura 4 – Comparação dos valores de μ da equação (3.50) obtidos utilizando os valores obtidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com os valores disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973)	63
Figura 5 – Comparação dos valores de $v(x)$ obtidos utilizando os valores obtidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com os valores disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973)	64
Figura 6 – Comparação dos valores de x obtidos utilizando os valores obtidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com os valores disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973)	64
Figura 7 – Curvas de Massa (em massas solares) em função do Raio (em km) obtidas através do método de Runge-Kutta-Fehlberg.	66

Lista de tabelas

Tabela 1 – Comparação dos valores de x e $v(x)$ obtidos utilizando os valores obtidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com os valores disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973), para $n = 3$	65
--	----

Sumário

	Introdução	21
0.1	Objetivos	21
0.2	Disposição dos capítulos	22
1	RELATIVIDADE GERAL	25
1.1	Princípio da Equivalência	25
1.2	Variedade Diferenciável	26
1.3	Vetores	27
1.4	1-Formas	28
1.5	Tensores	29
1.6	Tensor Métrico	31
1.7	Derivada Covariante	33
1.8	Tensor Energia-Momento	34
1.9	Transporte Paralelo	36
1.10	Tensor de Curvatura de Riemann	37
1.11	Tensor de Einstein	38
1.12	Espaço-Tempo Curvo	39
1.13	Equação de Campo de Einstein	39
2	EQUAÇÃO DE TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF	41
2.1	Métrica	41
2.2	Símbolos de Christoffel	42
2.3	Tensor de Curvatura de Riemann	45
2.4	Tensor de Ricci	47
2.5	Tensor de Ricci Misto	47
2.6	Escalar de Ricci	48
2.7	Tensor de Einstein	48
2.8	Tensor de Energia-Momento	48
2.9	Equações de Campo de Einstein	50
2.10	Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	50
2.11	Métrica de Schwarzschild	52
3	ESTRELAS POLITRÓPICAS	53
3.1	Equações de Estado	53
3.2	Índices Politrópicos	53
3.3	Equilíbrio Hidrostático	54

3.4	Estrelas Politrópicas Não-Relativísticas	54
3.5	Estrelas Politrópicas Relativísticas	56
4	RESULTADOS	59
4.1	Método Runge-Kutta-Fehlberg	59
4.2	Validação do Código para Estrela Politrópica Não-Relativística	61
4.3	Validação do Código para Estrela Politrópica Relativística	62
4.4	Curvas de Massa em função do Raio	65
	Conclusão	67
	REFERÊNCIAS	69
	APÊNDICES	71
	APÊNDICE A – VALIDAÇÃO DO PROGRAMA PARA ESTRELA POLITRÓPICA NÃO-RELATIVÍSTICA	74
	APÊNDICE B – VALIDAÇÃO DO PROGRAMA PARA ESTRELA POLITRÓPICA RELATIVÍSTICA	81
	APÊNDICE C – VALIDAÇÃO DO PROGRAMA PARA ESTRELA POLITRÓPICA RELATIVÍSTICA	88

Introdução

Em 1905, Albert Einstein publicou os primeiros trabalhos que deram origem à teoria da relatividade. Todavia, a conclusão da teoria da relatividade geral foi realizada por Einstein apenas em 1915. Essa teoria substituiu a lei da gravitação universal de Newton. Ela prevê que a presença de matéria-energia curva o espaço-tempo, criando geodésicas curvas nas quais os corpos movem-se.

Durante muitos anos, a correção do periélio de Mercúrio e o encurvamento da luz (constatado nos eclipses) foram algumas das poucas oportunidades para testar a teoria geral da relatividade. Contudo, em 2015, a detecção pelo LIGO (www.ligo.caltech.edu) de ondas gravitacionais produzidas pelo choque de dois buracos negros há 1,3 bilhão de anos, deu origem a uma forte comprovação da teoria da relatividade geral.

Há anos a simulação computacional tem-se mostrado importante como complemento à física teórica e à física computacional. O uso de simulações computacionais em relatividade geral é muitas vezes denominado de relatividade numérica. Simulações computacionais podem ser realizadas para solucionar as equações de campo de Einstein numericamente. Por exemplo, a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), resultante das equações de campo de Einstein para o interior de uma distribuição de matéria-energia estática e com simetria esférica pode ser resolvida pelo método de Runge-Kutta. A equação TOV pode ser utilizada para modelar, por exemplo, uma estrela de nêutrons. Para isso, pode-se utilizar um equação de estado politrópica.

A justificativa para a realização desse trabalho encontra-se na necessidade de produção de material e formação de recursos humanos na área de física computacional.

0.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é desenvolver programas capazes de simular corretamente os modelos de estrelas politrópicas relativísticas e não-relativísticas, através do método de Runge-Kutta-Fehlberg.

Alguns dos objetivos específicos desse trabalho são: desenvolver um material introdutório sobre relatividade geral que seja conciso e acessível para alunos dos últimos anos de licenciatura em física, apresentar a solução detalhada das equações de campo de Einstein para o interior de uma distribuição de matéria-energia estática e com simetria esférica dando origem a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, e apresentar detalhes da implementação do método de Runge-Kutta-Fehlberg na solução dos modelos de estrelas politrópicas relativísticas e não-relativísticas.

0.2 Disposição dos capítulos

Este trabalho está organizado em introdução, desenvolvimento e conclusão. O desenvolvimento é constituído por quatro capítulos.

No primeiro capítulo, descreve-se a teoria da relatividade geral de forma sucinta e acessível a alunos que estejam finalizando o curso de licenciatura em física. Alguns tópicos abordados são: princípio da equivalência, variedade diferenciável, vetores, 1-formas, espaço tangente, espaço cotangente, transformação covariante, transformação contravariante, tensores, produto tensorial, simetrização de tensores, transformações covariante e contravariante de tensores, equações tensoriais e covariância das leis da física, tensor métrico, produto escalar, abaixamento e levantamento de índices, símbolos de Christoffel, derivada covariante, tensor energia-momento, transporte paralelo, tensor de curvatura de Riemann, tensor de Ricci, tensor de Einstein, relação entre gravidade e espaço-tempo curvo e equações de campo de Einstein.

No segundo capítulo deduziu-se a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, a partir da equação de Einstein para uma métrica associada a um objeto material estático e esféricamente simétrico. Partiu-se da métrica, em seguida calculou-se os coeficientes da métrica inversa, assim como, as derivadas da métrica com relação às coordenadas. Em seguida, foram calculados em sequência: os símbolos de Christoffel, o tensor de curvatura de Riemann, o tensor de Ricci covariante, o tensor de Ricci misto, o tensor de Einstein misto e o tensor de energia-momento misto. As equações de campo de Einstein foram obtidas a partir do tensor de Einstein misto e do tensor de energia-momento misto encontrados. A partir das equações de campo de Einstein, foi deduzida a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Também foi obtida a expressão da métrica de Schwarzschild, que caracteriza o exterior da região esférica que contém massa em seu interior.

No terceiro capítulo são apresentados os modelos de estrelas politrópicas não-relativísticas, assim como, os modelos de estrela politrópicas relativísticas. São apresentadas as expressões para as equações de estado para uma estrela politrópica, algumas considerações sobre os valores assumidos pelos índices politrópicos, a expressão para o gradiente de pressão sob condição de equilíbrio hidrostático. Finalmente são obtidos os problemas de valor de contorno que caracterizam os modelos, utilizando a lei da gravitação universal de Newton, no caso do modelo não-relativístico; e as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, no caso relativístico.

No quarto capítulo são apresentados detalhes de implementação do método Runge-Kutta quártico (RK4) e do método Runge-Kutta-Fehlberg. Simulações do modelo de estrela politrópica não-relativística para índices politrópicos $n = 0$, $n = 1$, $n = 3$, e $n = 5$ são comparados com resultados da literatura. Simulações do modelo de estrela politrópica relativística para índices politrópicos $n = 0.1$, $n = 0.2$, $n = 0.3$, $n = 0.4$, $n = 0.5$, $n = 0.6$,

$n = 0.7$, $n = 0.8$, $n = 0.9$, $n = 1.0$ e $n = 3.0$ são comparados com resultados da literatura. Sistemas de equações diferenciais dos modelos de estrelas politrópicas relativísticas e não-relativísticas, para índice politrópico $n = 1.5$, $K = 5.3802 \times 10^3 Nm^3/kg^{5/3}$ e densidade central ρ_c variando de $1 \times 10^{16} kg/m^3$ a $1 \times 10^{20} kg/m^3$ são solucionados via método de Runge-Kutta-Fehlberg com passo espacial máximo de $hmax = 1 \times 10^{-5}$, passo espacial mínimo de $hmin = 1 \times 10^{-15}$ e tolerância $tol = 1 \times 10^{-6}$.

1 Relatividade Geral

Dentre os tópicos abordados neste capítulo, estão: princípio da equivalência, variedade diferenciável, vetores, 1-formas, espaço tangente, espaço cotangente, transformação covariante, transformação contravariante, tensores, produto tensorial, simetrização de tensores, transformações covariante e contravariante de tensores, equações tensoriais e covariância das leis da física, tensor métrico, produto escalar, abaixamento e levantamento de índices, símbolos de Christoffel, derivada covariante, tensor energia-momento, transporte paralelo, tensor de curvatura de Riemann, tensor de Ricci, tensor de Einstein, relação entre gravidade e espaço-tempo curvo e equações de campo de Einstein.

1.1 Princípio da Equivalência

Dados dois referenciais inerciais S e S' , em que o referencial S' move-se com velocidade \vec{v} com relação ao referencial S , a posição de uma partícula no referencial S é dada por $\vec{x} = \vec{x}_\perp + \vec{x}_\parallel$, em que \vec{x}_\perp é a componente perpendicular e \vec{x}_\parallel é a componente paralela à velocidade \vec{v} . A transformação de Lorentz altera apenas a componente paralela da posição, portanto, no referencial S' , a posição \vec{x}' da partícula é dada por

$$t' = \gamma(t - \beta \vec{x}_\parallel), \quad (1.1)$$

e

$$\vec{x}' = \vec{x}_\perp + \gamma(|\vec{x}_\parallel| - \beta t) \frac{\vec{x}_\parallel}{|\vec{x}_\parallel|}, \quad (1.2)$$

onde $\beta = v/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ é o fator de Lorentz.

Na relatividade especial é postulado que *as leis da física são as mesmas em qualquer referencial inercial*.

O potencial gravitacional da teoria Newtoniana é dado por

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \quad (1.3)$$

onde a fonte de campo gravitacional é a massa M e G é a constante de gravitação universal. Da equação (1.3), resulta que

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (1.4)$$

onde ρ é a densidade volumétrica de massa da fonte. Dessa equação vê-se que $\rho' = \frac{m'}{V'} = \frac{m\gamma}{V/\gamma} = \gamma^2 \frac{m}{V} = \gamma^2 \rho$, onde ρ e ρ' são as densidades nos referenciais S e S' , respectivamente. Dessa forma, vê-se que ρ na equação (1.4) não é uma quantidade invariante. Além disso, segundo essa equação, perturbações na fonte produzem potenciais que se propagam com

velocidade infinita. Para partículas que se movem a velocidades muito menores do que a velocidade da luz $\gamma \approx 1$, a gravidade newtoniana é uma boa aproximação.

A massa inercial, m_I , é aquela que aparece na segunda lei de Newton:

$$\vec{F} = m_I \vec{a}. \quad (1.5)$$

Dado o campo gravitacional, $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$, a massa gravitacional é aquela que aparece na lei da gravitação universal:

$$\vec{F} = -m_G \vec{\nabla}\phi. \quad (1.6)$$

A teoria newtoniana considera que essas massas são equivalentes: $m_I = m_G$, o que foi corroborado por experimentos de Eötvös, com precisão maior do que 10^{-12} . A afirmação de que as massas inercial e gravitacional são equivalentes, $m_I = m_G$, é conhecida como princípio da equivalência fraco. Disso resulta que $\vec{F} = m_I \vec{a} = m_G \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \ddot{\vec{x}} = \vec{g}$. A trajetória da partícula é dada pela solução do problema de valor inicial com equação $\ddot{\vec{x}} = \vec{g}$ e condições iniciais $\vec{x}(0)$ e $\dot{\vec{x}}(0)$ conhecidas, portanto, a trajetória é independente dos materiais que compõem a partícula. Dados dois referenciais \mathcal{O} e \mathcal{O}' , em que o primeiro é inercial e possui campo gravitacional uniforme \vec{g} e o segundo é acelerado com aceleração uniforme \vec{a} e apresenta campo gravitacional \vec{g}' , tem-se que as coordenadas espaciais no referencial \mathcal{O}' são $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}_0$, onde $\ddot{\vec{x}}_0 = \vec{a}$. Dessa forma, a equação de movimento em \mathcal{O}' é $\vec{g}' = \ddot{\vec{x}}' = \ddot{\vec{x}} - \ddot{\vec{x}}_0 = \vec{g} - \vec{a}$. Se \mathcal{O}' apresenta um campo gravitacional não-nulo $\vec{g}' \neq 0$ e a partícula está em queda livre $\vec{a} = \vec{g}$, então o referencial \mathcal{O}' está em queda livre e $\vec{g}' = 0$. Um observador no referencial \mathcal{O}' não seria capaz de realizar nenhum experimento que lhe permitisse distinguir se \mathcal{O}' está em queda livre ou numa região em que há ausência de gravidade. Em síntese: campos gravitacionais uniformes são indistinguíveis de acelerações uniformes. Localmente, isto é, em uma região espacial muito pequena com variação temporal também muito pequena, pode-se considerar que o campo gravitacional é uniforme.

1.2 Variedade Diferenciável

Seja \mathcal{M} um conjunto não-vazio. Uma topologia em \mathcal{M} é um subconjunto $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M})$ ¹ que satisfaz os seguintes axiomas: (1) a união de subconjuntos arbitrários de τ é um elemento de τ ; (2) a interseção de dois elementos quaisquer de τ é um elemento de τ ; (3) \mathcal{M} é um elemento de τ . Se τ é uma topologia em \mathcal{M} , então, o par (\mathcal{M}, τ) é um espaço topológico, e os elementos de τ são chamados de abertos de (\mathcal{M}, τ) .

Se dois pontos distintos do espaço topológico \mathcal{M} possuem vizinhanças² disjuntas, diz-se que ele é um espaço de Hausdorff. Uma base enumerável de um espaço topológico é

¹ O conjunto das partes de \mathcal{M} , $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, é o conjunto de todos os subconjuntos de \mathcal{M}

² Uma vizinhança de um ponto $p \in \mathcal{M}$ é qualquer subconjunto aberto $V_p \in \mathcal{M}$ tal que $p \in V_p$

uma coleção enumerável de abertos do espaço tal que todo aberto do espaço é a união de abertos dessa coleção. Um espaço topológico \mathcal{M} localmente euclidiano de dimensão n é aquele em que todo ponto de \mathcal{M} tem uma vizinhança homeomórfica³ a um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Uma variedade topológica \mathcal{M} de dimensão $n \geq 1$ é um espaço topológico com as seguintes propriedades: (1) \mathcal{M} é um espaço de Hausdorff; (2) \mathcal{M} tem uma base enumerável; (3) \mathcal{M} é localmente euclidiano.

Uma carta sobre um aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ é um homeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{U} \subset \mathcal{M} &\rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto (x^0, \dots, x^{n-1}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Um atlas de \mathcal{M} em \mathbb{R}^n é uma coleção de $N \geq 1$ cartas $\varphi_i : \mathcal{U}_i \subset \mathcal{M} \rightarrow \varphi_i(\mathcal{U}_i) \subset \mathbb{R}^n$ que cobrem \mathcal{M} , isto é, $\bigcup_{i=1}^N \mathcal{U}_i = \mathcal{M}$. Dadas duas cartas em \mathcal{M} , $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ e $(\mathcal{U}_\beta, \varphi_\beta)$, tais que $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, a função de transição (mudança de coordenadas) $\tau_{\alpha,\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$

$$\tau_{\alpha,\beta} : \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \quad (1.8)$$

é suave (de classe C^∞). Dois atlas em \mathcal{M} são compatíveis se a união deles também é um atlas em \mathcal{M} . A união de todos os atlas compatíveis a um dado atlas em \mathcal{M} é o atlas maximal ou estrutura diferenciável de \mathcal{M} .

Uma variedade diferenciável (de classe C^∞) \mathcal{M} ou variedade suave (ou somente variedade) é uma variedade topológica \mathcal{M} munida de um atlas maximal.

1.3 Vetores

Dada uma curva suave $x^\mu(\lambda)$ em uma variedade \mathcal{M} , um vetor, \vec{v} , tangente à curva em um ponto p é o operador derivada direcional

$$\vec{v} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu = v^\mu \partial_\mu. \quad (1.9)$$

Todos os vetores tangentes a \mathcal{M} no ponto p encontram-se no espaço tangente $T_p\mathcal{M}$, que é um espaço vetorial. Não é possível somar vetores em pontos diferentes de um espaço curvo, pois, os mesmos encontram-se em espaços vetoriais diferentes. O fibrado tangente $T\mathcal{M}$ é o conjunto dos espaços tangente de todos os pontos de \mathcal{M} . Cada vetor de base ∂_μ é tangente à sua respectiva curva coordenada. Se for realizada uma mudança das coordenadas $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ para as coordenadas $\{\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3\}$, ter-se-á

$$\bar{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \partial_\nu, \quad (1.10)$$

³ Dois espaços topológicos \mathcal{M} e \mathcal{N} são ditos homeomórficos se existe uma bijeção contínua $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ (denominada homeomorfismo), cuja inversa também é contínua

esse tipo de transformação é dita covariante. Dado um vetor $\vec{v} \in T_p\mathcal{M}$, tem-se

$$\vec{v} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} = \bar{v}^\nu \bar{e}_\nu \Rightarrow \bar{v}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} v^\mu, \quad (1.11)$$

esse tipo de transformação é dita contravariante.

Os coeficientes métricos $g_{\mu\nu}$ são definidos como o produto escalar $g_{\mu\nu} = \partial_\mu \cdot \partial_\nu$. O produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{v}$ é dado por

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu \cdot \frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (1.12)$$

1.4 1-Formas

Uma 1-forma (vetor dual ou vetor covariante) é uma função linear $\omega : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. O conjunto de todas as 1-formas em um ponto p de \mathcal{M} é o espaço cotangente $T_p^*\mathcal{M}$ (dual do espaço tangente). O conjunto dos espaços cotangentes de todos os pontos de \mathcal{M} é o fibrado cotangente.

O gradiente df de uma função escalar f é o exemplo mais simples de 1-forma:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (1.13)$$

Cada 1-forma de base dx^μ é um gradiente normal à sua respectiva superfície coordenada.

Se for realizada uma mudança das coordenadas $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ para as coordenadas $\{\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3\}$, ter-se-á

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu}, \quad (1.14)$$

portanto, as componentes do gradiente transformam-se de forma covariante. Além disso,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{x}^\nu \Rightarrow d\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (1.15)$$

isto é, as 1-formas de base transformam-se de forma contravariante.

O produto escalar de um vetor de base ∂_μ com uma 1-forma de base dx^ν é definido como

$$dx^\nu \cdot \partial_\mu = \partial_\mu \cdot dx^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (1.16)$$

Dada a 1-forma $\tilde{\omega} = \omega_\mu dx^\mu$ e o vetor $\vec{v} = v^\nu \partial_\nu$, o produto escalar resulta em

$$\tilde{\omega} \cdot \vec{v} = \omega_\mu v^\nu dx^\mu \cdot \partial_\nu = \omega_\mu v^\nu \delta_\mu^\nu = \omega_\mu v^\mu. \quad (1.17)$$

Se for realizada uma mudança das coordenadas $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ para as coordenadas $\{\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3\}$, ter-se-á

$$\tilde{\omega} \cdot \vec{v} = \bar{\omega}_\mu \bar{v}^\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \omega_\nu \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\theta} v^\theta = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\theta} \omega_\nu v^\theta = \delta_\theta^\nu \omega_\nu v^\theta = \omega_\nu v^\nu, \quad (1.18)$$

ou seja, o produto escalar é invariante sob transformações de coordenadas.

1.5 Tensores

Uma 1-forma é uma função $\tilde{\omega} : T_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, denominada de tensor do tipo (0,1), que transforma um vetor em um número real:

$$\tilde{\omega}(\vec{v}) = \tilde{\omega} \cdot \vec{v} = \omega_\mu v^\mu. \quad (1.19)$$

Um vetor é uma função $\vec{v} : T_P^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, denominada de tensor do tipo (1,0), que transforma uma 1-forma em um número real:

$$\vec{v}(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega} \cdot \vec{v} = \omega_\mu v^\mu. \quad (1.20)$$

O produto tensorial de um vetor $\vec{v} = v^\nu \partial_\nu$ por uma 1-forma $\tilde{\omega} = \omega_\mu dx^\mu$ é

$$\begin{aligned} \vec{v} \otimes \tilde{\omega} &= (v^\nu \partial_\nu) \otimes (\omega_\mu dx^\mu) = v^\nu \omega_\mu \partial_\nu \otimes dx^\mu = \\ &= v^0 \omega_0 \partial_0 \otimes dx^0 + v^1 \omega_0 \partial_1 \otimes dx^0 + v^2 \omega_0 \partial_2 \otimes dx^0 + v^3 \omega_0 \partial_3 \otimes dx^0 + \\ &+ v^0 \omega_1 \partial_0 \otimes dx^1 + v^1 \omega_1 \partial_1 \otimes dx^1 + v^2 \omega_1 \partial_2 \otimes dx^1 + v^3 \omega_1 \partial_3 \otimes dx^1 + \\ &+ v^0 \omega_2 \partial_0 \otimes dx^2 + v^1 \omega_2 \partial_1 \otimes dx^2 + v^2 \omega_2 \partial_2 \otimes dx^2 + v^3 \omega_2 \partial_3 \otimes dx^2 + \\ &+ v^0 \omega_3 \partial_0 \otimes dx^3 + v^1 \omega_3 \partial_1 \otimes dx^3 + v^2 \omega_3 \partial_2 \otimes dx^3 + v^3 \omega_3 \partial_3 \otimes dx^3, \end{aligned} \quad (1.21)$$

que é um tensor do tipo (1,1), com componentes $v^\nu \omega_\mu$ e tensores de base $e_\mu \otimes e^\nu$. O tensor $\vec{v} \otimes \tilde{\omega}$ transforma uma 1-forma $\tilde{b} = b_\beta e^\beta$ e um vetor $\vec{a} = a^\alpha e_\alpha$ em um número real:

$$\begin{aligned} \vec{v} \otimes \tilde{\omega}(\tilde{b}, \vec{a}) &= \vec{v}(\tilde{b})\tilde{\omega}(\vec{a}) = \vec{v}(b_\beta e^\beta)\tilde{\omega}(a^\alpha e_\alpha) \\ &= b_\beta \vec{v}(e^\beta) a^\alpha \tilde{\omega}(e_\alpha) = b_\beta v^\beta a^\alpha \omega_\alpha. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Um tensor do tipo (r,s) , T , é uma função $T : (T_P^*\mathcal{M})^r \times (T_P\mathcal{M})^s \rightarrow \mathbb{R}$, que transforma r 1-formas e s vetores em um número real.

Por exemplo, um tensor do tipo (3,2) pode ser obtido como o produto tensorial de três vetores $a^\alpha \partial_\alpha$, $b^\beta \partial_\beta$ e $c^\gamma \partial_\gamma$ e duas 1-formas $\omega_\mu dx^\mu$ e $\theta_\nu dx^\nu$ resultando no tensor

$$S = a^\alpha b^\beta c^\gamma \omega_\mu \theta_\nu \partial_\alpha \otimes \partial_\beta \otimes \partial_\gamma \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (1.23)$$

cujas componentes são $S^{\alpha\beta\gamma}{}_{\mu\nu} = a^\alpha b^\beta c^\gamma \omega_\mu \theta_\nu$. A alteração da ordem dos índices altera a componente do tensor.

Seja um tensor $T_{\mu\nu}$. Um tensor simétrico $T_{(\mu\nu)}$ com relação aos índices μ e ν é

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}), \quad (1.24)$$

e Um tensor antissimétrico $T_{[\mu\nu]}$ com relação aos índices μ e ν é

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}). \quad (1.25)$$

O algoritmo para simetrizar ou antissimetrizar um tensor é: somar todas as permutações do tensor (invertendo o sinal para permutações ímpares apenas no caso de antissimetriação), em seguida, dividir o resultado da soma anterior pelo fatorial do número de índices permutados. Por exemplo, o tensor antissimétrico obtido a partir do tensor $T_{\mu\nu\theta}$ é

$$T_{[\mu\nu\theta]} = \frac{1}{3!} (T_{\mu\nu\theta} - T_{\nu\mu\theta} + T_{\nu\theta\mu} - T_{\theta\nu\mu} + T_{\theta\mu\nu} - T_{\mu\theta\nu}). \quad (1.26)$$

Dado um tensor $S^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{\nu_1\nu_2}$, se for realizada uma mudança das coordenadas $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ para as coordenadas $\{\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3\}$, ter-se-á

$$\begin{aligned} \bar{S}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\beta_1\beta_2} &= \bar{a}^{\alpha_1}\bar{b}^{\alpha_2}\bar{c}^{\alpha_3}\bar{\omega}_{\beta_1}\bar{\theta}_{\beta_2} \\ &= \frac{\partial\bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} a^{\mu_1} \frac{\partial\bar{x}^{\alpha_2}}{\partial x^{\mu_2}} b^{\mu_2} \frac{\partial\bar{x}^{\alpha_3}}{\partial x^{\mu_3}} c^{\mu_3} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial\bar{x}^{\beta_1}} \omega_{\nu_1} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial\bar{x}^{\beta_2}} \theta_{\nu_2} \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$= \frac{\partial\bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial\bar{x}^{\alpha_2}}{\partial x^{\mu_2}} \frac{\partial\bar{x}^{\alpha_3}}{\partial x^{\mu_3}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial\bar{x}^{\beta_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial\bar{x}^{\beta_2}} S^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{\nu_1\nu_2},$$

isto é, o tensor S do tipo (3,2) é três vezes contravariante e duas vezes covariante.

A contração de um tensor é a redução da ordem de um tensor resultante do igualamento de um índice superior com um índice inferior. Por exemplo, igualando os índices μ_1 e ν_1 de $S^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{\nu_1\nu_2} = T^{\mu_2\mu_3}_{\nu_2}$.

Um campo tensorial do tipo (r,s) é uma função que associa um tensor T do tipo (r,s) a cada ponto p da variedade \mathcal{M} .

Uma equação escrita na forma tensorial, como por exemplo:

$$A^{\alpha\beta} = kB^{\alpha\beta}, \quad (1.28)$$

no sistema de coordenadas $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, tem a mesma forma em um outro sistema de coordenadas $\{\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3\}$, pois as componentes dos tensores no novo sistema de coordenadas são

$$\bar{A}^{\alpha\beta} = \frac{\partial\bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} A^{\mu\nu} \quad (1.29)$$

e

$$\bar{B}^{\alpha\beta} = \frac{\partial\bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} B^{\mu\nu}, \quad (1.30)$$

portanto,

$$\bar{A}^{\alpha\beta} = \frac{\partial\bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} A^{\mu\nu} = \frac{\partial\bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} kB^{\mu\nu} = k \frac{\partial\bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} B^{\mu\nu} = k\bar{B}^{\alpha\beta}. \quad (1.31)$$

Essa dedução pode ser repetida para tensores de qualquer tipo.

O princípio de covariância geral afirma que as leis da física devem ter a mesma forma em todos os referenciais. Dessa forma, é necessário que as equações que representam as leis da física sejam escritas na forma tensorial.

1.6 Tensor Métrico

Uma métrica em um ponto P da variedade \mathcal{M} é um tensor do tipo $(0,2)$ $\mathbf{g} : T_P\mathcal{M} \times T_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ simétrico e não-degenerado dado por

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (1.32)$$

onde $g_{\mu\nu}$ são os coeficientes métricos. Dados os vetores $\vec{v} = v^\alpha \partial_\alpha$ e $\vec{w} = w^\beta \partial_\beta$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\vec{v}, \vec{w}) &= (g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu)(v^\alpha \partial_\alpha, w^\beta \partial_\beta) = g_{\mu\nu} dx^\mu(v^\alpha \partial_\alpha) dx^\nu(w^\beta \partial_\beta) \\ \mathbf{g}(\vec{v}, \vec{w}) &= g_{\mu\nu} v^\alpha dx^\mu(\partial_\alpha) w^\beta dx^\nu(\partial_\beta) = g_{\mu\nu} v^\alpha e^\mu(e_\alpha) w^\beta e^\nu(e_\beta) \\ \mathbf{g}(\vec{v}, \vec{w}) &= g_{\mu\nu} v^\alpha \delta_\alpha^\mu w^\beta \delta_\beta^\nu = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Analogamente, é possível mostrar que

$$\mathbf{g}(\vec{w}, \vec{v}) = g_{\nu\mu} v^\mu w^\nu. \quad (1.34)$$

Como o tensor \mathbf{g} é simétrico

$$\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{w}) = \mathbf{g}(\vec{w}, \vec{v}) \Rightarrow g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad (1.35)$$

ou seja, a matriz dos coeficientes métricos é simétrica.

Fazendo o produto escalar dos vetores $\vec{v} = v^\alpha \partial_\alpha$ e $\vec{w} = w^\beta \partial_\beta$, tem-se

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v^\alpha w^\beta \partial_\alpha \cdot \partial_\beta = g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta \Rightarrow \mathbf{g}(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}. \quad (1.36)$$

Nota-se que existe um isomorfismo que a cada vetor $\vec{v} = v^\alpha \partial_\alpha$ associa uma 1-forma $\tilde{v} = v_\alpha dx^\alpha$, pois

$$\tilde{v} \cdot \vec{w} = v_\alpha w^\beta dx_\alpha \cdot \partial_\beta = v_\alpha w^\beta \delta_\alpha^\beta = v_\beta w^\beta = g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta \Rightarrow v_\beta = g_{\alpha\beta} v^\alpha. \quad (1.37)$$

Diz-se que os coeficientes métricos $g_{\mu\nu}$ são abaixadores de índices, pois, transformam as componentes dos vetores em componentes de 1-formas.

Um $(0,2)$ -tensor \mathbf{g} é não-degenerado, pois, dados dois vetores $\vec{v}, \vec{w} \in T_P\mathcal{M}$ e a forma bilinear $\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{w}) = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu$, a matriz $[g_{\mu\nu}]$ é invertível.

Uma métrica inversa em um ponto P da variedade \mathcal{M} é um $(2,0)$ -tensor $\mathbf{g}^{-1} : T_P^*\mathcal{M} \times T_P^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ simétrico e não-degenerado dado por

$$\mathbf{g}^{-1} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu, \quad (1.38)$$

onde os coeficientes $g^{\mu\nu}$ são tais que $g^{\mu\nu} g_{\nu\theta} = \delta_\theta^\mu$.

Os coeficientes $g^{\mu\nu}$ são levantadores de índices, pois, transformam as componentes das 1-formas em componentes de vetores. Por exemplo, dado o tensor $T^{\alpha\beta\gamma}_{\theta\mu\nu}$, pode-se abaixar o índice β e levantar o índice θ , fazendo

$$T^{\alpha\gamma\phi}_{\zeta\mu\nu} = g_{\zeta\beta} g^{\phi\theta} T^{\alpha\beta\gamma}_{\theta\mu\nu}. \quad (1.39)$$

Dado o deslocamento infinitesimal $d\vec{s} = dx^\alpha \partial_\alpha$, a métrica é

$$\mathbf{g}(d\vec{s}, d\vec{s}) = (g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu)(dx^\alpha \partial_\alpha, dx^\alpha \partial_\alpha) \Rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.40)$$

O espaço-tempo de Minkowski é o conjunto dos pontos de coordenadas x^0, x^1, x^2 e x^3 e métrica η , dada por

$$\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (1.41)$$

Dada uma variedade \mathcal{M} com métrica \mathbf{g} e um campo vetorial $\vec{v} \in T_P(\mathcal{M})$ ($\vec{v} \neq 0$) \vec{v} é tipo tempo quando $\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{v}) < 0$, \vec{v} é tipo espaço quando $\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{v}) > 0$, \vec{v} é tipo luz quando $\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{v}) = 0$.

Dois vetores $\vec{v} \neq 0$ e $\vec{w} \neq 0$ são ortogonais quando $\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{w}) = 0$. Se $\vec{v} \neq 0$ é um vetor tipo tempo, existe um referencial em que $\vec{v} = (v^0, 0, 0, 0)$ com $v^0 \neq 0$, e $\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{w}) = v^0 w_0 = 0 \Rightarrow w_0 = 0$, portanto, $\mathbf{g}(\vec{w}, \vec{w}) = w^0 w_0 + w^i w_i = w^i w_i > 0$ (a norma de um vetor geométrico diferente de zero é positiva), isto é, \vec{w} é tipo espacial. Em síntese: um vetor tipo tempo e um vetor tipo luz não podem ser ortogonais entre si e dois vetores tipo tempo também não podem ser ortogonais entre si.

Do curso de *cálculo infinitesimal II* sabe-se que o comprimento s de uma curva é dado por

$$s = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} |\vec{v}| d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} d\lambda, \quad (1.42)$$

onde \vec{v} é o vetor tangente à curva, a qual é descrita pelos pontos de coordenadas $x^\mu(\lambda)$ com λ variando de λ_0 a λ_1 . Como $\vec{v} \cdot \vec{v} = \mathbf{g}(\vec{v}, \vec{v}) = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$. Além disso, as componentes do vetor tangente à curva são as derivadas das coordenadas com relação ao parâmetro λ $v^\mu = dx^\mu/d\lambda$, portanto,

$$s = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{v})} d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (1.43)$$

Dessa forma, o elemento de arco ds é dado por

$$ds = \sqrt{\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{v})} d\lambda = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (1.44)$$

No sistema de unidades em que $c = 1$, o quadrado de ds no referencial próprio ($dx = dy = dz = 0$ e $t = \tau$) é dado por

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -d\tau^2 \Rightarrow d\tau^2 = -\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{v}) d\lambda^2. \quad (1.45)$$

A 4-velocidade de uma curva tipo tempo é um vetor tangente parametrizado pelo tempo próprio τ :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (1.46)$$

Nesse caso,

$$d\tau^2 = -\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{u})d\tau^2 \Rightarrow g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1. \quad (1.47)$$

Uma curva $\lambda(u)$ tipo tempo que conecta dois pontos $A, B \in \mathcal{M}$, tais que $\lambda(0) = A$ e $\lambda(1) = B$, dá origem a outras curvas tipo tempo, ao sofrer pequenas perturbações. Dentre essas curvas, a que extremiza o tempo próprio é aquela em que

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (1.48)$$

a qual é denominada equação da geodésica, onde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ são os símbolos de Christoffel, dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\phi} \left(\frac{\partial g_{\phi\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\phi\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\phi} \right). \quad (1.49)$$

As deduções completas das equações (1.48) e (1.49) são encontradas nas páginas de 106 a 108 da referência (CARROLL, 2004).

1.7 Derivada Covariante

Para que as leis da física preservem a forma sob transformações de coordenadas, elas devem transformar-se da mesma forma que (1.27), isto é, como tensores. Todavia, derivadas parciais de tensores em variedades com curvaturas não-nulas não são tensores, como pode ser constatado pelo cálculo da derivada parcial $\bar{\partial}_\alpha$ de (1.11):

$$\frac{\partial \bar{v}^\nu}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha} v^\mu. \quad (1.50)$$

Daí vem a necessidade de definir uma derivada mais geral que produza tensores, a derivada covariante, que para um vetor v^μ é

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v^\lambda, \quad (1.51)$$

onde $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ são os coeficientes de conexão, que são iguais a zero para variedades de curvatura nula. No caso de uma 1-forma ω_λ , tem-se

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda. \quad (1.52)$$

Para detalhes das deduções, recomenda-se a leitura das páginas de 62 a 69 da referência (MCMAHON; ALSING, 2005).

A derivada covariante de um tensor do tipo (m, n) $T^{p_1 \dots p_m}_{r_1 \dots r_n}$ é

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{p_1 \dots p_m}_{r_1 \dots r_n} &= \partial_\alpha T^{p_1 \dots p_m}_{r_1 \dots r_n} \\ &- \Gamma_{r_1 \alpha}^s T^{p_1 \dots p_m}_{s r_2 \dots r_n} - \Gamma_{r_2 \alpha}^s T^{p_1 \dots p_m}_{r_1 s r_3 \dots r_n} - \dots \\ &\quad - \Gamma_{r_1 \alpha}^s T^{p_1 \dots p_m}_{r_1 \dots r_{n-1} s} \\ &+ \Gamma_{r_1 \alpha}^s T^{s p_2 \dots p_m}_{r_1 \dots r_n} + \Gamma_{r_2 \alpha}^s T^{p_1 s p_3 \dots p_m}_{r_1 \dots r_n} + \dots \\ &\quad + \Gamma_{r_1 \alpha}^s T^{p_1 \dots p_{m-1} s}_{r_1 \dots r_n}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

O operador derivada covariante é linear. A seguir estão listadas algumas outras propriedades:

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda(v^\mu\omega_\nu) &= \nabla_\lambda v^\mu\omega_\nu + v^\mu\nabla_\lambda\omega_\nu \quad (\text{regra de Leibniz}), \\
\nabla_\mu v^\mu &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}v^\mu\right) \quad (\text{divergência covariante}), \\
\nabla_\mu v^\nu - \nabla_\nu v^\mu &= \partial_\mu v^\nu - \partial_\nu v^\mu \quad (\text{conexão simétrica}), \\
\nabla_\rho(g^{\mu\sigma}T_{\mu\sigma}^\lambda) &= g^{\mu\sigma}\nabla_\rho T_{\mu\sigma}^\lambda \quad (\text{comutatividade com } g^{\mu\sigma}), \\
\nabla_\mu(T^\lambda_{\lambda\rho}) &= (\nabla T^\lambda_{\lambda\rho})_\mu \quad (\text{comuta com contração}), \\
\nabla_\mu\phi &= \partial_\mu\phi \quad (\text{reduz a } \partial_\mu \text{ para } \phi \text{ escalar}).
\end{aligned} \tag{1.54}$$

O tensor torção $T_{\mu\nu}{}^\lambda$ é

$$T_{\mu\nu}{}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda. \tag{1.55}$$

Há unicidade da métrica quando a torção é nula, resultando em $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$, e quando $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$.

A partir da simetria $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$, chega-se a expressão

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right). \tag{1.56}$$

1.8 Tensor Energia-Momento

O tensor de energia-momento $\bar{T}^{\mu\nu}$, no sistema de referência próprio $\bar{x}^\mu = (\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$, é um tensor simétrico, em que $\bar{T}^{00} = \rho$ é a densidade de matéria-energia, \bar{T}^{0i} é o fluxo de energia através da superfície \bar{x}^i , \bar{T}^{i0} é a densidade volumétrica de momento, \bar{T}^{ij} é tensão (de cisalhamento para $j \neq i$ e normal para $i = j$).

Na mecânica dos fluidos a conservação da massa é estabelecida pela equação da continuidade:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u^3}{\partial z} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.57}$$

e a conservação do momento é estabelecida pela equação:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^1) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^1 u^1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u^1 u^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u^1 u^3) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 u^1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u^2 u^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u^2 u^3) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^3) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^3 u^1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u^3 u^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u^3 u^3) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Definindo $T^{\mu\nu}$ como

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu = \rho \begin{bmatrix} 1 & u^1 & u^2 & u^3 \\ u^1 & u^1 u^1 & u^1 u^2 & u^1 u^3 \\ u^2 & u^2 u^1 & u^2 u^2 & u^2 u^3 \\ u^3 & u^3 u^1 & u^3 u^2 & u^3 u^3 \end{bmatrix}, \quad (1.59)$$

é possível reescrever as equações (1.57) e (1.58) numa única equação:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.60)$$

Em um fluido em que não ocorre fluxo de calor, tem-se

$$\bar{T}^{i0} = \bar{T}^{0i} = 0. \quad (1.61)$$

Em um fluido sem viscosidade,

$$\bar{T}^{ij} = 0, \quad (1.62)$$

quando $i \neq j$.

Um fluido ideal é aquele em que não há fluxo de calor, não há viscosidade, a pressão P é a mesma em todas as direções:

$$\bar{T}^{11} = \bar{T}^{22} = \bar{T}^{33} = P, \quad (1.63)$$

e a densidade de matéria-energia ρ é dada por

$$\bar{T}^{00} = \rho. \quad (1.64)$$

As componentes do tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ no sistema de referência $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ são dadas por

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \bar{T}^{\alpha\beta} = \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \bar{T}^{00} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} \bar{T}^{01} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} \bar{T}^{02} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} \bar{T}^{03} + \\ &\quad \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \bar{T}^{10} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} \bar{T}^{11} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} \bar{T}^{12} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} \bar{T}^{13} + \\ &\quad \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \bar{T}^{20} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} \bar{T}^{21} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} \bar{T}^{22} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} \bar{T}^{23} + \\ &\quad \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \bar{T}^{30} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} \bar{T}^{31} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} \bar{T}^{32} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} \bar{T}^{33} = \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \bar{T}^{00} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} \bar{T}^{11} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} \bar{T}^{22} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} \bar{T}^{33} = \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \rho + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} P + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} P + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} P. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{P} \left(T^{\mu\nu} - \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \rho \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3}. \quad (1.66)$$

Se $\bar{g}^{\mu\nu}$ são as componentes do tensor métrico no sistema de referência próprio, as componentes do tensor métrico $g^{\mu\nu}$ no sistema de referência $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ são dadas por

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \bar{g}^{\alpha\beta} = \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \bar{g}^{00} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} \bar{g}^{01} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} \bar{g}^{02} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} \bar{g}^{03} + \\ &\quad \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \bar{g}^{10} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} \bar{g}^{11} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} \bar{g}^{12} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} \bar{g}^{13} + \\ &\quad \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \bar{g}^{20} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} \bar{g}^{21} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} \bar{g}^{22} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} \bar{g}^{23} + \\ &\quad \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \bar{g}^{30} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} \bar{g}^{31} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} \bar{g}^{32} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} \bar{g}^{33} = \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \bar{g}^{00} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} \bar{g}^{11} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} \bar{g}^{22} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} \bar{g}^{33} = \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} (-1) + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} (+1) + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} (+1) + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} (+1). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Dessa forma,

$$g^{\mu\nu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^1} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3}. \quad (1.68)$$

Comparando as equações (1.66) e (1.68), chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \left(T^{\mu\nu} - \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \rho \right) &= g^{\mu\nu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} \\ \Rightarrow T^{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0} (\rho + P) + g^{\mu\nu} P. \end{aligned} \quad (1.69)$$

No referencial próprio, $\bar{x}^0 = \tau$ é o tempo próprio, portanto, $u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0}$ é componente da quadrivelocidade. Dessa forma,

$$T^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu (\rho + P) + g^{\mu\nu} P. \quad (1.70)$$

Utilizando $g_{\nu\alpha}$ para abaixar o índice ν , e renomeando α por ν , tem-se

$$T^\mu{}_\nu = u^\mu u_\nu (\rho + P) + \delta^\mu{}_\nu P. \quad (1.71)$$

1.9 Transporte Paralelo

Em uma variedade sem curvatura, o transporte paralelo de um vetor V^μ ao longo de uma curva $x^\lambda(\tau)$ com vetores tangentes $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ ocorre quando $dV^\mu/d\tau = 0$, isto

é,

$$\frac{dV^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dV^\mu}{dx^\lambda} = u^\lambda \partial_\lambda V^\mu = 0. \quad (1.72)$$

Dessa forma, em uma variedade com curvatura, o transporte paralelo ocorre quando

$$u^\lambda \nabla_\lambda V^\mu = \frac{dx^\lambda}{d\tau} \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu V^\nu \right) = \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} V^\nu = 0. \quad (1.73)$$

A derivada $u^\lambda \nabla_\lambda V^\mu$ costuma ser escrita como $DV^\mu/D\tau$ e referida como derivada absoluta. Portanto, o transporte paralelo de u^μ , resulta em

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} u^\nu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (1.74)$$

que é a equação da geodésica, vista anteriormente.

1.10 Tensor de Curvatura de Riemann

Seja um retângulo de dimensões infinitesimais δa e δb , de vértices $A(a, b)$ e $B(a + \delta a, b)$ sobre a curva coordenada x^μ , e vértices $C(a + \delta a, b + \delta b)$ e $D(a, b + \delta b)$ sobre a curva coordenada x^ν . Após a realização do transporte paralelo de um vetor ao longo do retângulo $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$, a diferença entre os valores inicial e final das componentes V^α , em uma variedade sem curvatura, é

$$\begin{aligned} & V_A^\alpha - V_{A'}^\alpha = \delta V^\alpha \\ & = [(V_C^\alpha - V_D^\alpha) - (V_B^\alpha - V_A^\alpha)] - [(V_C^\alpha - V_B^\alpha) - (V_D^\alpha - V_{A'}^\alpha)] \\ & = \delta a \left[\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\mu} \Big|_{x^\nu=b+\delta b} - \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\mu} \Big|_{x^\nu=b} \right] \\ & \quad - \delta b \left[\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\nu} \Big|_{x^\mu=a+\delta a} - \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\nu} \Big|_{x^\mu=a} \right] \\ & = \delta a \delta b \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\mu} - \delta a \delta b \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\nu} \\ & = \delta a \delta b [\partial_\nu, \partial_\mu] V^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Dessa forma, a diferença entre os valores inicial e final das componentes V^ρ , em uma variedade com curvatura, é

$$\delta V^\rho = \delta a \delta b [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho. \quad (1.76)$$

Desenvolvendo o termo $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho$, chega-se a

$$\begin{aligned} & [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\ & = \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho (\nabla_\nu V^\sigma) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho + (\mu \leftrightarrow \nu) \\ & = \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda V^\rho \\ & \quad - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho V^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ & = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Para uma torção nula $T^\lambda_{\mu\nu} = 0$, tem-se

$$\delta V^\rho = \delta a \delta b R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma, \quad (1.78)$$

onde

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (1.79)$$

é o tensor de curvatura de Riemann. O tensor de Riemann totalmente covariante é dado por

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} = g_{\lambda\rho} R^\rho_{\sigma\mu\nu}. \quad (1.80)$$

Uma propriedade importante é a identidade de Bianchi (ver páginas 57 e 58 da referência (WEBER, 2015)), dada por

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0. \quad (1.81)$$

1.11 Tensor de Einstein

Contraindo a equação (1.81) com um par de tensores métrico, tem-se

$$\begin{aligned} g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} (R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}) &= 0, \\ g^{\beta\nu} (R^\mu_{\beta\mu\nu;\lambda} - R^\mu_{\beta\mu\lambda;\nu} + R^\mu_{\beta\nu\lambda;\mu}) &= 0, \\ g^{\beta\nu} (R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} - R_{\beta\nu\lambda;\mu}) &= 0, \\ R^\nu_{\nu;\lambda} - R^\nu_{\lambda;\nu} - R^{\nu\mu}_{\nu\lambda;\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (1.82)$$

onde $(\cdot)_{;\mu}$ representa $\nabla_\mu(\cdot)$. O tensor misto de Ricci é definido como

$$R^\mu_{\lambda} = R^{\nu\mu}_{\nu\lambda}. \quad (1.83)$$

O escalar de Ricci é definido como

$$R = R^\nu_{\nu}. \quad (1.84)$$

Substituindo o tensor misto de Ricci, R^μ_{λ} , e o escalar de Ricci, R , na equação (1.82), resulta em

$$R_{;\lambda} - R^\nu_{\lambda;\nu} - R^\mu_{\lambda;\mu} = 0. \quad (1.85)$$

Como índices mudos sempre podem ser trocados, trocando ν por μ , tem-se

$$R_{;\lambda} = 2R^\mu_{\lambda;\mu}. \quad (1.86)$$

Como $R_{;\lambda} = g^\mu_{\lambda} R_{;\mu}$, tem-se

$$\left(R^\mu_{\lambda} - \frac{1}{2} g^\mu_{\lambda} R \right)_{;\mu} = 0. \quad (1.87)$$

Multiplicando tudo por $g^{\lambda\nu}$, chega-se a

$$\left(R^{\mu\lambda} - \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}R\right)_{;\mu} = 0. \quad (1.88)$$

Define-se o tensor de Einstein como

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R, \quad (1.89)$$

que é um tensor simétrico, pois, tanto o tensor de Ricci quanto o o tensor métrico são tensores simétricos. De (1.88) conclui-se que

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = \nabla_{\nu}G^{\mu\nu} = 0. \quad (1.90)$$

1.12 Espaço-Tempo Curvo

Referenciais acelerados equivalem a geometrias curvas de espaço-tempo.

Um observador S em movimento uniforme, encontra-se em um espaço-tempo chato pseudoeuclidiano, com métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.91)$$

Um segundo observador S' que esteja em movimento acelerado, com aceleração a , encontrar-se-á em um espaço-tempo curvo (a trajetória de uma partícula em repouso com relação a S' é uma curva no espaço-tempo), com métrica

$$ds'^2 = g'_{\mu\nu}dx'^{\mu}dx'^{\nu} = -(1 - a^2t'^2)dt'^2 + 2at'dx'dt' + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2. \quad (1.92)$$

Dessa forma, um referencial acelerado equivale a um espaço-tempo curvo. Por outro lado, do princípio da equivalência conclui-se que um referencial com gravidade equivale a um referencial acelerado. Logo, a gravidade equivale à curvatura do espaço-tempo.

1.13 Equação de Campo de Einstein

O fato da trajetória de um corpo em um campo gravitacional não depender das propriedades materiais do mesmo evidencia que a natureza puramente geométrica da gravidade. Einstein propôs que a equação que descreve a gravidade é

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}, \quad (1.93)$$

em que o tensor de momento-energia $T^{\mu\nu}$ relaciona-se ao tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$, estabelecendo a forma como a matéria-energia gera a curvatura do espaço-tempo. A covariância dessa lei é garantida pelo uso de tensores. Um campo de gravitação uniforme pode ser

levado, através de uma transformação de coordenadas, a um sistema de coordenadas com métrica de Minkowski. Todavia, isso não é possível no caso de um campo gravitacional não-uniforme. Nesse caso, isso é possível apenas localmente (num volume infinitesimal), em que o campo possa ser tomado como uniforme. Em outras palavras, o espaço-tempo na presença de um campo gravitacional é curvo, e chato apenas localmente. Dessa forma, a divergência dos membros da equação anterior deve ser feita utilizando derivação covariante:

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = k\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} \Rightarrow 0 = 0. \quad (1.94)$$

Além disso, para que a equação (1.93) esteja correta, no limite em que as partículas movem-se lentamente e o campo gravitacional é fraco e estático, deve-se obter a lei gravitacional newtoniana dada em (1.4). Para que a equação (1.93) resulte em (1.4), é necessário tomar $k = 8\pi G/c^2$ na equação (1.93). Essa dedução é apresentada nas páginas de 153 a 158 da referência (CARROLL, 2004). Dessa forma, a equação de campo de Einstein é

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}. \quad (1.95)$$

2 Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Neste capítulo é realizada a dedução da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, resultante da solução da equação de Einstein para uma métrica associada a um objeto material estático e esfericamente simétrico. Também deduz-se a expressão da métrica de Schwarzschild, que caracteriza o exterior da região esférica que contém massa em seu interior.

2.1 Métrica

Algumas considerações devem ser feitas a fim de estabelecer a forma da métrica associada a um objeto material estático e esfericamente simétrico. A independência temporal da métrica estabelece que a transformação $dt \rightarrow -dt$ não deve alterar os coeficientes métricos, os quais, portanto, devem ser iguais a zero para os termos cruzados $dt \otimes dr$, $dt \otimes d\theta$ e $dt \otimes d\phi$. A simetria esférica da métrica estabelece que as transformações $d\phi \rightarrow -d\phi$ e $d\theta \rightarrow -d\theta$ não devem alterar os coeficientes métricos, os quais, portanto, devem ser iguais a zero para os termos cruzados $d\phi \otimes dr$, $d\phi \otimes d\theta$ e $d\theta \otimes dr$. Para $r \rightarrow \infty$ ou $m(r) \rightarrow 0$ ($m(r)$ é distribuição de matéria-energia associada à métrica), a métrica deve resultar na métrica de Minkowski:

$$\eta = -dt \otimes dt + dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2(\theta) d\phi \otimes d\phi. \quad (2.1)$$

Dessa forma, a métrica associada a um objeto material estático e esfericamente simétrico é dada por (WEBER, 2017)

$$\mathbf{g} = -e^{(2\alpha(r))} dt \otimes dt + e^{(2\beta(r))} dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2(\theta) d\phi \otimes d\phi. \quad (2.2)$$

Os termos $e^{(2\alpha(r))}$ e $e^{(2\beta(r))}$ são positivos e funções de r , garantindo a obtenção da métrica de Minkowski com a correta assinatura no infinito ou na ausência de matéria-energia.

Os coeficientes métricos não-nulos são

$$\begin{aligned} g_{00} = g_{tt} &= -e^{(2\alpha(r))} \\ g_{11} = g_{rr} &= e^{(2\beta(r))} \\ g_{22} = g_{\theta\theta} &= r^2 \\ g_{33} = g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2(\theta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

As únicas derivadas parciais diferentes de zero de coeficientes métricos são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} &= -2 e^{(2\alpha(r))} \frac{\partial}{\partial r} \alpha(r), \\
\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} &= 2 e^{(2\beta(r))} \frac{\partial}{\partial r} \beta(r), \\
\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} &= 2r \\
\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} &= 2r \sin(\theta)^2 \\
\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} &= 2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$. Como a métrica é uma matriz diagonal, sua inversa \mathbf{g}^{-1} também é uma matriz diagonal, cujos elementos são os inversos dos elementos correspondentes na matriz do tensor métrico, portanto,

$$\begin{aligned}
g^{00} = g^{tt} &= -e^{(-2\alpha(r))} \\
g^{11} = g^{rr} &= e^{(-2\beta(r))} \\
g^{22} = g^{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2} \\
g^{33} = g^{\phi\phi} &= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2 Símbolos de Christoffel

Os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\zeta}$ diferentes de zero foram calculados, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi 0}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{\varphi 1}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^\varphi} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2} g^{01} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{02} \left(\frac{\partial g_{20}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} g^{03} \left(\frac{\partial g_{30}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^3} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} \left(-e^{(-2\alpha(r))} \right) \left(-2 e^{(2\alpha(r))} \frac{\partial}{\partial r} \alpha(r) \right) = \frac{\partial \alpha}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\varphi 0}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varphi} \right) = \frac{1}{2} g^{10} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{13} \left(\frac{\partial g_{30}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{(-2\beta(r))} \right) \left(2 e^{(2\alpha(r))} \frac{\partial}{\partial r} \alpha(r) \right) = e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \frac{\partial \alpha}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{1\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{\varphi 1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\varphi} \right) = \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) + \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{(-2\beta(r))} \right) \left(2e^{(2\beta(r))} \frac{\partial}{\partial r} \beta(r) \right) = \frac{\partial \beta}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{1\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{\varphi 2}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\varphi} \right) = \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) + \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{2}g^{11} \left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{(-2\beta(r))} \right) (-2r) = -r e^{(-2\beta(r))}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{1\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{\varphi 3}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^\varphi} \right) = \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) + \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{2}g^{11} \left(-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{(-2\beta(r))} \right) (-2r \sin(\theta)^2) = -r \left(e^{(-2\beta(r))} \right) \sin(\theta)^2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{2\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi 2}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{\varphi 1}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^\varphi} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} \right) + \\
&+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^3} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right) (2r) = \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{2\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{\varphi 3}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^\varphi} \right) = \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) + \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{2}g^{22} \left(-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right) (-2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) = -\sin(\theta) \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{31}^3 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}g^{3\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi 3}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{\varphi 1}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^\varphi} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{30} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{31} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^1} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{32} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \right) (2r \sin(\theta)^2) = \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}g^{3\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi 3}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{\varphi 2}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^\varphi} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{30} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{31} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{32} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \right) (2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Desses resultados, conclui-se que

$$\begin{aligned}
\partial_1 \Gamma^0_{01} &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2}, & \Gamma^0_{10} \Gamma^0_{01} &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2, & \Gamma^0_{01} \Gamma^1_{11} &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \beta}{\partial r}, \\
\Gamma^0_{01} \Gamma^1_{22} &= -re^{(-2\beta(r))} \frac{\partial \alpha}{\partial r}, & \Gamma^0_{01} \Gamma^1_{33} &= -re^{(-2\beta(r))} \sin(\theta)^2 \frac{\partial \alpha}{\partial r}, \\
\partial_1 \Gamma^1_{22} &= 2re^{(-2\beta(r))} \frac{\partial}{\partial r} \beta(r) - e^{(-2\beta(r))}, & \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{22} &= -re^{(-2\beta(r))} \frac{\partial \beta}{\partial r}, \\
&& \Gamma^1_{22} \Gamma^2_{12} &= e^{(-2\beta(r))}, \\
\partial_1 \Gamma^1_{33} &= \left[2re^{(-2\beta(r))} \frac{\partial}{\partial r} \beta(r) - e^{(-2\beta(r))} \right] \sin(\theta)^2, & \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{33} &= -re^{(-2\beta(r))} \sin(\theta)^2 \frac{\partial \beta}{\partial r}, \\
&& \Gamma^1_{33} \Gamma^2_{13} &= e^{(-2\beta(r))} \sin(\theta)^2, \\
\partial_2 \Gamma^2_{33} &= \sin(\theta)^2 - \cos(\theta)^2, & \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{33} &= -e^{(-2\beta(r))} \sin(\theta)^2 \\
&& \Gamma^2_{33} \Gamma^3_{23} &= -\cos(\theta)^2, \\
\partial_1 \Gamma^1_{00} &= 2e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 - 2e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \beta}{\partial r} + e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2}, \\
\Gamma^1_{00} \Gamma^0_{10} &= e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2, & \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{00} &= e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \beta}{\partial r}, \\
\Gamma^2_{21} \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{r} e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \frac{\partial \alpha}{\partial r}, & \Gamma^3_{31} \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{r} e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \frac{\partial \alpha}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

2.3 Tensor de Curvatura de Riemann

As componentes do tensor de curvatura de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ diferentes de zero foram calculados, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
R^0_{101} = -R^0_{110} &= \partial_0\Gamma^0_{11} - \partial_1\Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{11} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{11} - \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} + \\
&+ \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{11} - \Gamma^0_{12}\Gamma^2_{01} + \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{11} - \Gamma^0_{13}\Gamma^3_{01} = -\partial_1\Gamma^0_{01} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{11} \\
&= -\frac{\partial^2\alpha}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial\alpha}{\partial r}\frac{\partial\beta}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
R^0_{202} = -R^0_{220} &= \partial_0\Gamma^0_{22} - \partial_2\Gamma^0_{02} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{22} - \Gamma^0_{20}\Gamma^0_{02} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{22} - \Gamma^0_{21}\Gamma^1_{02} \\
&+ \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{22} - \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{22} - \Gamma^0_{23}\Gamma^3_{02} = \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{22} \\
&= -re^{(-2\beta(r))}\frac{\partial\alpha}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
R^0_{303} = -R^0_{330} &= \partial_0\Gamma^0_{33} - \partial_3\Gamma^0_{03} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{33} - \Gamma^0_{30}\Gamma^0_{03} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{33} - \Gamma^0_{31}\Gamma^1_{03} \\
&+ \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{33} - \Gamma^0_{32}\Gamma^2_{03} + \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{33} - \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03} = \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{33} \\
&= -re^{(-2\beta(r))}\sin(\theta)^2\frac{\partial\alpha}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{212} = -R^1_{221} &= \partial_1\Gamma^1_{22} - \partial_2\Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{22} - \Gamma^1_{20}\Gamma^0_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12} \\
&+ \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{13}\Gamma^3_{22} - \Gamma^1_{23}\Gamma^3_{12} = \partial_1\Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} \\
&= 2re^{(-2\beta(r))}\frac{\partial}{\partial r}\beta(r) - e^{(-2\beta(r))} - re^{(-2\beta(r))}\frac{\partial\beta}{\partial r} - e^{(-2\beta(r))} = re^{(-2\beta(r))}\frac{\partial\beta}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{313} = -R^1_{331} &= \partial_1\Gamma^1_{33} - \partial_3\Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{33} - \Gamma^1_{30}\Gamma^0_{13} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{33} - \Gamma^1_{31}\Gamma^1_{13} \\
&+ \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{33} - \Gamma^1_{32}\Gamma^2_{13} + \Gamma^1_{13}\Gamma^3_{33} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} = \partial_1\Gamma^1_{33} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{33} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} \\
&= \left(2re^{(-2\beta(r))}\frac{\partial}{\partial r}\beta(r) - e^{(-2\beta(r))}\right)\sin(\theta)^2 - re^{(-2\beta(r))}\sin(\theta)^2\frac{\partial\beta}{\partial r} - e^{(-2\beta(r))}\sin(\theta)^2 \\
&= re^{(-2\beta(r))}\sin(\theta)^2\frac{\partial\beta}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
R^2_{323} = -R^2_{332} &= \partial_2\Gamma^2_{33} - \partial_3\Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{20}\Gamma^0_{33} - \Gamma^2_{30}\Gamma^0_{23} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{33} - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{23} \\
&+ \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{33} - \Gamma^2_{32}\Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{33} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23} = \partial_2\Gamma^2_{33} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{33} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23} \\
&= (\sin(\theta)^2 - \cos(\theta)^2) + [-e^{(-2\beta(r))}\sin(\theta)^2] - [-\cos(\theta)^2] \\
&= (e^{(2\beta(r))} - 1)e^{(-2\beta(r))}\sin(\theta)^2
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{001} &= -R^1_{010} = \partial_0 \Gamma^1_{10} - \partial_1 \Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00} \Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{10} \Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01} \Gamma^1_{10} - \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{00} \\
&+ \Gamma^1_{02} \Gamma^2_{10} - \Gamma^1_{12} \Gamma^2_{00} + \Gamma^1_{03} \Gamma^3_{10} - \Gamma^1_{13} \Gamma^3_{00} = -\partial_1 \Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00} \Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{00} \\
&= \left[-2 e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + 2 e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \beta}{\partial r} - e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} \right] \\
&\quad + \left[e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 \right] - \left[e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] \\
&= \left[- \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} \right] e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
R^2_{002} &= -R^2_{020} = \partial_0 \Gamma^2_{20} - \partial_2 \Gamma^2_{00} + \Gamma^2_{00} \Gamma^0_{20} - \Gamma^2_{20} \Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{01} \Gamma^1_{20} - \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{00} \\
&+ \Gamma^2_{02} \Gamma^2_{20} - \Gamma^2_{22} \Gamma^2_{00} + \Gamma^2_{03} \Gamma^3_{20} - \Gamma^2_{23} \Gamma^3_{00} = -\Gamma^2_{21} \Gamma^1_{00} \\
&= -\frac{1}{r} e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \frac{\partial \alpha}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
R^3_{003} &= -R^3_{030} = \partial_0 \Gamma^3_{30} - \partial_3 \Gamma^3_{00} + \Gamma^3_{00} \Gamma^0_{30} - \Gamma^3_{30} \Gamma^0_{00} + \Gamma^3_{01} \Gamma^1_{30} - \Gamma^3_{31} \Gamma^1_{00} \\
&+ \Gamma^3_{02} \Gamma^2_{30} - \Gamma^3_{32} \Gamma^2_{00} + \Gamma^3_{03} \Gamma^3_{30} - \Gamma^3_{33} \Gamma^3_{00} = -\Gamma^3_{31} \Gamma^1_{00} \\
&= -\frac{1}{r} e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \frac{\partial \alpha}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
R^3_{223} &= -R^3_{232} = \partial_2 \Gamma^3_{32} - \partial_3 \Gamma^3_{22} + \Gamma^3_{20} \Gamma^0_{32} - \Gamma^3_{30} \Gamma^0_{22} + \Gamma^3_{21} \Gamma^1_{32} - \Gamma^3_{31} \Gamma^1_{22} \\
&+ \Gamma^3_{22} \Gamma^2_{32} - \Gamma^3_{32} \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23} \Gamma^3_{32} - \Gamma^3_{33} \Gamma^3_{22} = \partial_2 \Gamma^3_{32} - \Gamma^3_{31} \Gamma^1_{22} - \Gamma^3_{32} \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23} \Gamma^3_{32} \\
&= - \left(e^{(2\beta(r))} - 1 \right) e^{(-2\beta(r))}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
R^3_{113} &= -R^3_{131} = \partial_1 \Gamma^3_{31} - \partial_3 \Gamma^3_{11} + \Gamma^3_{10} \Gamma^0_{31} - \Gamma^3_{30} \Gamma^0_{11} + \Gamma^3_{11} \Gamma^1_{31} - \Gamma^3_{31} \Gamma^1_{11} \\
&+ \Gamma^3_{12} \Gamma^2_{31} - \Gamma^3_{32} \Gamma^2_{11} + \Gamma^3_{13} \Gamma^3_{31} - \Gamma^3_{33} \Gamma^3_{11} = \partial_1 \Gamma^3_{31} - \Gamma^3_{31} \Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{32} \Gamma^2_{11} + \Gamma^3_{13} \Gamma^3_{31} \\
&= -\frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
R^2_{112} &= -R^2_{121} = \partial_1 \Gamma^2_{21} - \partial_2 \Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{10} \Gamma^0_{21} - \Gamma^2_{20} \Gamma^0_{11} + \Gamma^2_{11} \Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{11} \\
&+ \Gamma^2_{12} \Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{22} \Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{13} \Gamma^3_{21} - \Gamma^2_{23} \Gamma^3_{11} = \partial_1 \Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} \Gamma^2_{21} \\
&= -\frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

2.4 Tensor de Ricci

O tensor de Ricci é a contração do tensor de curvatura de Riemann dada por

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = R^0_{\mu 0\nu} + R^1_{\mu 1\nu} + R^2_{\mu 2\nu} + R^3_{\mu 3\nu}. \quad (2.28)$$

As componentes $R_{\nu\nu}$ foram calculadas, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^\lambda_{\mu\nu\lambda} = R^0_{000} + R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030} \\ &= \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right] e^{(2\alpha(r)-2\beta(r))} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= R^\lambda_{\mu\nu\lambda} = R^0_{101} + R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131} \\ &= - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= R^\lambda_{\mu\nu\lambda} = R^0_{202} + R^1_{212} + R^2_{222} + R^3_{232} \\ &= \left[-r \frac{\partial \alpha}{\partial r} + r \frac{\partial \beta}{\partial r} - 1 + e^{(2\beta(r))} \right] e^{(-2\beta(r))} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= R^\lambda_{\mu\nu\lambda} = R^0_{303} + R^1_{313} + R^2_{323} + R^3_{333} \\ &= \left[-r \frac{\partial \alpha}{\partial r} + r \frac{\partial \beta}{\partial r} - 1 + e^{(2\beta(r))} \right] e^{(-2\beta(r))} \sin^2(\theta) \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.5 Tensor de Ricci Misto

O tensor de Ricci misto é obtido pelo levantamento de um dos índices do tensor de Ricci:

$$R^\mu_{\nu} = g^{\mu\lambda} R_{\lambda\nu} = g^{\mu 0} R_{0\nu} + g^{\mu 1} R_{1\nu} + g^{\mu 2} R_{2\nu} + g^{\mu 3} R_{3\nu}. \quad (2.33)$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci misto são dadas por

$$\begin{aligned} R^0_0 &= g^{0\lambda} R_{\lambda 0} = g^{00} R_{00} + g^{01} R_{10} + g^{02} R_{20} + g^{03} R_{30} = g^{00} R_{00} \\ &= \left[- \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right] e^{(-2\beta(r))}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} R^1_1 &= g^{1\lambda} R_{\lambda 1} = g^{10} R_{01} + g^{11} R_{11} + g^{12} R_{21} + g^{13} R_{31} = g^{11} R_{11} \\ &= \left[- \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] e^{(-2\beta(r))}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
R^2_{\ 2} &= g^{2\lambda} R_{\lambda 2} = g^{20} R_{02} + g^{21} R_{12} + g^{22} R_{22} + g^{23} R_{32} = g^{22} R_{22} \\
&= -\frac{\left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} - r \frac{\partial \beta}{\partial r} - e^{(2\beta(r))} + 1\right) e^{(-2\beta(r))}}{r^2},
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
R^3_{\ 3} &= g^{3\lambda} R_{\lambda 3} = g^{30} R_{03} + g^{31} R_{13} + g^{32} R_{23} + g^{33} R_{33} = g^{33} R_{33} \\
&= -\frac{\left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} - r \frac{\partial \beta}{\partial r} - e^{(2\beta(r))} + 1\right) e^{(-2\beta(r))}}{r^2}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

2.6 Escalar de Ricci

O escalar de Ricci é a contração do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_{\ \mu} = R^0_{\ 0} + R^1_{\ 1} + R^2_{\ 2} + R^3_{\ 3} \\
&= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\
&= -\frac{2}{r^2} \left[r^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + r^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \left(r^2 \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 2r \right) \frac{\partial \beta}{\partial r} - e^{(2\beta(r))} + 1 \right] e^{(-2\beta(r))}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

2.7 Tensor de Einstein

As componentes do tensor de Einstein são dadas por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \tag{2.39}$$

As componentes não nulas do tensor de Einstein são dadas por

$$\begin{aligned}
G^0_{\ 0} &= R^0_{\ 0} - \frac{1}{2} R = \frac{-2r \frac{\partial \beta}{\partial r} e^{(-2\beta(r))} + e^{(-2\beta(r))} - 1}{r^2}, \\
G^1_{\ 1} &= R^1_{\ 1} - \frac{1}{2} R = \frac{\left(2r \frac{\partial \alpha}{\partial r} - e^{(2\beta(r))} + 1\right) e^{(-2\beta(r))}}{r^2}, \\
G^2_{\ 2} &= R^2_{\ 2} - \frac{1}{2} R = \frac{\left(r \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}\right)^2 + r \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} - \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 1\right) \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\partial \alpha}{\partial r}\right) e^{(-2\beta(r))}}{r}, \\
G^3_{\ 3} &= R^3_{\ 3} - \frac{1}{2} R = \frac{\left(r \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}\right)^2 + r \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} - \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 1\right) \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\partial \alpha}{\partial r}\right) e^{(-2\beta(r))}}{r}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

2.8 Tensor de Energia-Momento

Como o fluido perfeito considerado está em repouso, no referencial próprio tem-se

$$u^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tau} = 0. \tag{2.41}$$

Da equação (??), conclui-se que

$$u^\mu u_\mu = -1 \Rightarrow u^0 u_0 + u^1 u_1 + u^2 u_2 + u^3 u_3 = -1 \Rightarrow u^0 u_0 = -1. \quad (2.42)$$

Além disso,

$$u_0 = g_{0\mu} u^\mu = g_{00} u^0 + g_{01} u^1 + g_{02} u^2 + g_{03} u^3 = g_{00} u^0 = -e^{-2\alpha} u^0 \Rightarrow -e^{-2\alpha} (u^0)^2 = -1 \Rightarrow u^0 = e^\alpha. \quad (2.43)$$

Da equação (1.71), conclui-se que

$$\begin{aligned} T^0_0 &= u^0 u_0 (\rho + P) + \delta^0_0 P = -(\rho + P) + P = -\rho, \\ T^1_1 &= u^1 u_1 (\rho + P) + \delta^1_1 P = P, \\ T^2_2 &= u^2 u_2 (\rho + P) + \delta^2_2 P = P, \\ T^3_3 &= u^3 u_3 (\rho + P) + \delta^3_3 P = P. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Da lei de conservação de energia-momento,

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0 \Rightarrow \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} T^\mu_\alpha = 0. \quad (2.45)$$

Para $\nu = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} &\partial_\mu T^\mu_1 + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha_1 - \Gamma^\alpha_{1\mu} T^\mu_\alpha = 0 \\ &\Rightarrow \partial_0 T^0_1 + \partial_1 T^1_1 + \partial_2 T^2_1 + \partial_3 T^3_1 + \\ &+ \Gamma^0_{00} T^0_1 + \Gamma^1_{01} T^0_1 + \Gamma^2_{02} T^0_1 + \Gamma^3_{03} T^0_1 + \Gamma^0_{10} T^1_1 + \Gamma^1_{11} T^1_1 + \Gamma^2_{12} T^1_1 + \Gamma^3_{13} T^1_1 + \\ &+ \Gamma^0_{20} T^2_1 + \Gamma^1_{21} T^2_1 + \Gamma^2_{22} T^2_1 + \Gamma^3_{23} T^2_1 + \Gamma^0_{30} T^3_1 + \Gamma^1_{31} T^3_1 + \Gamma^2_{32} T^3_1 + \Gamma^3_{33} T^3_1 + \\ &- \Gamma^0_{10} T^0_0 - \Gamma^1_{10} T^0_1 - \Gamma^2_{10} T^0_2 - \Gamma^3_{10} T^0_3 - \Gamma^0_{11} T^1_0 - \Gamma^1_{11} T^1_1 - \Gamma^2_{11} T^1_2 - \Gamma^3_{11} T^1_3 + \\ &- \Gamma^0_{12} T^2_0 - \Gamma^1_{12} T^2_1 - \Gamma^2_{12} T^2_2 - \Gamma^3_{12} T^2_3 + -\Gamma^0_{13} T^3_0 - \Gamma^1_{13} T^3_1 - \Gamma^2_{13} T^3_2 - \Gamma^3_{13} T^3_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Os símbolos de Christoffel não-nulos que aparecem na expressão anterior são

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{10} &= \frac{\partial \alpha}{\partial r}, \\ \Gamma^1_{11} &= \frac{\partial \beta}{\partial r}, \\ \Gamma^3_{13} &= \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Como o fluido é estático ($\partial_0 = 0$) e há simetria esférica ($\partial_2 = 0$ e $\partial_3 = 0$), a única derivada não-nula é ∂_1 , portanto,

$$\begin{aligned} \partial_0 T^0_1 &= \partial_2 T^2_1 = \partial_3 T^3_1 = 0, \\ \partial_1 T^1_1 &= \frac{\partial P}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dessa forma, a equação (2.46) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial r} + \Gamma^0_{10}T^1_1 + \Gamma^1_{11}T^1_1 + \Gamma^2_{12}T^1_1 + \Gamma^3_{13}T^1_1 + \\ & \quad - \Gamma^0_{10}T^0_0 - \Gamma^1_{11}T^1_1 - \Gamma^2_{12}T^2_2 - \Gamma^3_{13}T^3_3 = 0 \quad (2.49) \\ \Rightarrow & \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \alpha}{\partial r}P + \frac{\partial \beta}{\partial r}P + \frac{1}{r}P + \frac{1}{r}P - \frac{\partial \alpha}{\partial r}(-\rho) - \frac{\partial \beta}{\partial r}P - \frac{1}{r}P - \frac{1}{r}P = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, chega-se à expressão da taxa de variação da pressão com o raio:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial \alpha}{\partial r}P + \frac{\partial \alpha}{\partial r}(-\rho) = -\frac{\partial \alpha}{\partial r}(P + \rho). \quad (2.50)$$

Como $\rho(r)$ é a densidade de matéria-energia no volume infinitesimal $4\pi r^2 dr$, tem-se:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (2.51)$$

2.9 Equações de Campo de Einstein

Abaixando um dos índices da equação (1.95), substituindo (2.40) e (2.44), e utilizando um sistema de unidades em que $G = 1$ e $c = 1$, chega-se a

$$\frac{-2r \frac{\partial \beta}{\partial r} e^{(-2\beta(r))} + e^{(-2\beta(r))} - 1}{r^2} = -8\pi\rho, \quad (2.52)$$

$$\frac{2r \frac{\partial \alpha}{\partial r} e^{(-2\beta(r))} - 1 + e^{(-2\beta(r))}}{r^2} = 8\pi P, \quad (2.53)$$

$$\frac{\left(r \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + r \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} - \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 1 \right) \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) e^{(-2\beta(r))}}{r} = 8\pi P, \quad (2.54)$$

$$\frac{\left(r \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + r \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} - \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 1 \right) \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) e^{(-2\beta(r))}}{r} = 8\pi P. \quad (2.55)$$

2.10 Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

A equação (2.52) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left(e^{(-2\beta(r))} r - r \right) = -2(4\pi r^2 \rho(r)) \\ \Rightarrow & \frac{d}{dr} \left(e^{(-2\beta(r))} r - r \right) = -2 \frac{dm(r)}{dr} = \frac{d}{dr} (-2m(r)) \quad (2.56) \\ & \Rightarrow e^{(-2\beta(r))} = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \end{aligned}$$

Longe da matéria-energia que curva o espaço-tempo, este deve tender ao espaço de Minkowski:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{2\beta(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} = 1. \quad (2.57)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} e^{(-2\beta(r))} &= \frac{d}{dr} \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right] \\ \Rightarrow -2 \frac{d\beta}{dr} e^{(-2\beta(r))} &= -\frac{2 \frac{dm}{dr} r - 2m}{r^2} \\ \Rightarrow e^{(-2\beta(r))} \frac{d\beta}{dr} &= \frac{\frac{dm}{dr} r - m}{r^2} \\ \Rightarrow e^{(-2\beta(r))} \frac{d\beta}{dr} &= \frac{[4\pi r^2 \rho(r)] r - m}{r^2} \\ \Rightarrow e^{(-2\beta(r))} \frac{d\beta}{dr} &= 4\pi r \rho(r) - \frac{m}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Subtraindo (2.53) de (2.52) chega-se a

$$\frac{2}{r} e^{(-2\beta(r))} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{2}{r} e^{(-2\beta(r))} \frac{\partial \beta}{\partial r} = 8\pi (\rho + P). \quad (2.59)$$

Substituindo (2.56) e (2.58) na equação anterior, chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{2}{r} \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{2}{r} \left[4\pi r \rho(r) - \frac{m}{r^2} \right] &= 8\pi (\rho + P) \\ \left[\frac{2}{r} - \frac{4m(r)}{r^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 8\pi \rho - \frac{2m}{r^3} &= 8\pi \rho + 8\pi P \\ \left[\frac{2}{r} - \frac{4}{r^2} m(r) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial r} &= 8\pi P + \frac{2}{r^3} m(r). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Multiplicando por $r^3/2$, tem-se

$$\begin{aligned} [r^2 - 2mr] \frac{\partial \alpha}{\partial r} &= 4\pi P r^3 + m \\ \frac{d\alpha}{dr} &= \frac{4\pi P r^3 + m}{r^2 - 2mr}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -\frac{d\alpha}{dr} (P + \rho), \\ \frac{dP}{dr} &= -\frac{4\pi P r^3 + m}{r^2 - 2mr} (P + \rho). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Essa equação é denominada de *Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*, a qual deve ser resolvida juntamente com a equação

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (2.63)$$

2.11 Métrica de Schwarzschild

Os resultados da seção anterior referem-se ao caso em que $r < R$, ou seja, em que a matéria está limitada ao interior de uma região de raio R com massa total M .

Para $r > R$, tem-se $m(r) = M$, $\rho = 0$ e $P = 0$.

Fazendo $\rho = 0$ e $P = 0$ em (2.59), chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{2}{r}e^{(-2\beta(r))}\frac{\partial\alpha}{\partial r} + \frac{2}{r}e^{(-2\beta(r))}\frac{\partial\beta}{\partial r} &= 0. \\ \Rightarrow \frac{\partial\alpha}{\partial r} + \frac{\partial\beta}{\partial r} &= 0 \\ \Rightarrow \alpha &= -\beta + cte. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Na página 196 da referência (CARROLL, 2004), é mostrado que a constante cte pode ser eliminada, se t for trocado por $e^{-cte}t$.

Como $m(r) = M$ para $r > R$, de (2.56), (2.64) e (2.2), chega-se a métrica de Schwarzschild que caracteriza o exterior da esfera de raio R e massa M :

$$\mathbf{g} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2(\theta) d\phi \otimes d\phi. \tag{2.65}$$

3 Estrelas Politrópicas

A estrutura das estrelas pode ser estudada através de modelos bastante simplificados, denominados de estrelas politrópicas (MACIEL, 1999).

3.1 Equações de Estado

Como demonstrado em (MACIEL, 1999), as equações de estado para uma estrela politrópica de índice n são

$$\frac{d(\ln P)}{d(\ln \rho)} = 1 + \frac{1}{n}, \quad (3.1)$$

$$\frac{d(\ln \rho)}{d(\ln T)} = \frac{n(4 - 3\beta)}{1 + n(1 - \beta)}, \quad (3.2)$$

$$\frac{d(\ln P)}{d(\ln T)} = \frac{(n + 1)(4 - 3\beta)}{1 + n(1 - \beta)}, \quad (3.3)$$

onde P , ρ e T são pressão, densidade e temperatura. A pressão P é dada por

$$P = P_r + P_g, \quad (3.4)$$

em que P_g é a pressão do gás e P_r é a pressão de radiação. Além disso,

$$n = \frac{24 - 21\beta}{8 - 3\beta - 3\beta^2} \quad (3.5)$$

e

$$\beta = \frac{P_g}{P} = 1 - \frac{P_r}{P}. \quad (3.6)$$

3.2 Índices Politrópicos

O valor que o índice politrópico, n , assume, depende do tipo de gás ao qual o modelo está sendo aplicado.

No caso em que a pressão de radiação é desprezível ($P_r \ll P_g$), o qual pode ser aplicado, segundo a referência (MACIEL, 1999), a um gás não-relativístico degenerado, tem-se

$$P_r \ll P_g \Rightarrow \beta \rightarrow 1 \Rightarrow n \rightarrow 3/2. \quad (3.7)$$

No caso em que a pressão de radiação é predominante ($P_r \gg P_g$), o qual pode ser aplicado, segundo a referência (MACIEL, 1999), a um gás relativístico degenerado, tem-se

$$P_r \gg P_g \Rightarrow \beta \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 3. \quad (3.8)$$

No caso em que a pressão é constante ($\frac{d(\ln P)}{d(\ln \rho)} = 0$), tem-se

$$\frac{d(\ln P)}{d(\ln \rho)} = 0 \Rightarrow n = -1. \quad (3.9)$$

No caso em que a densidade é constante ($\frac{d(\ln \rho)}{d(\ln P)} = 0$), tem-se

$$\frac{d(\ln \rho)}{d(\ln P)} = 0 \Rightarrow \frac{n}{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

No caso em que a temperatura é constante ($\frac{d(\ln T)}{d(\ln \rho)} = 0$), tem-se

$$\frac{d(\ln T)}{d(\ln \rho)} = 0 \Rightarrow \frac{1/n + 1 - \beta}{4 - 3\beta} = \text{constante} = \frac{1 - \beta}{4 - 3\beta} \Rightarrow 1/n \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

3.3 Equilíbrio Hidrostático

A força resultante exercida sobre um elemento de volume $dV = A dr$ de uma estrela, contido entre os raios r e $r + dr$, é dada por

$$F_R = PA - (P + dP)A - gdm, \quad (3.12)$$

onde P é a pressão em r , $P + dP$ é a pressão em $r + dr$, A é a área de superfície do elemento de volume infinitesimal em r , PA é a força para fora sobre o elemento de volume infinitesimal e $(P + dP)A + gdm$ é a força para dentro sobre o elemento de volume infinitesimal.

Fazendo algumas manipulações algébricas, chega-se a

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g. \quad (3.13)$$

Como

$$g = \frac{Gm(r)}{r^2}, \quad (3.14)$$

tem-se

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \Rightarrow \frac{r^2 dP}{\rho dr} = -Gm. \quad (3.15)$$

3.4 Estrelas Politrópicas Não-Relativísticas

Derivando a equação (3.15) com relação a r , chega-se à expressão

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 dP}{\rho dr} \right) = -G \frac{dm}{dr}. \quad (3.16)$$

Como

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (3.17)$$

tem-se

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi Gr^2 \rho. \quad (3.18)$$

Reescrevendo a equação de estado de uma estrela politrópica, chega-se a

$$\frac{d(\ln P)}{d(\ln \rho)} = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow P = K \rho^{(1+\frac{1}{n})}. \quad (3.19)$$

Derivando a equação anterior com relação a r , tem-se

$$\frac{dP}{dr} = K \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rho^{\frac{1}{n}} \frac{d\rho}{dr}. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.18), chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho} K \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rho^{\frac{1}{n}} \frac{d\rho}{dr} \right] &= -4\pi Gr^2 \rho, \\ \frac{d}{dr} \left[r^2 \rho^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\rho}{dr} \right] &= -\frac{n}{n+1} \frac{4\pi Gr^2 \rho}{K}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Se $y(r)$ é uma variável que assume valor $y(0) = 1$, é possível definir ρ em termos de ρ_C (a densidade no centro da estrela) como

$$\rho = \rho_C y^n, \quad (3.22)$$

e

$$r = \frac{x}{a}. \quad (3.23)$$

Derivando (3.22) e (3.23) com relação a r , chega-se a

$$\rho = \rho_C y^n \Rightarrow \frac{d\rho}{dr} = n \rho_C y^{n-1} \frac{dy}{dr} = n \rho_C y^{n-1} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dr} \quad (3.24)$$

e

$$r = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dx}{dr} = a. \quad (3.25)$$

Dessas equações, tem-se

$$\frac{d\rho}{dr} = n \rho_C y^{n-1} \frac{dy}{dx} a \quad (3.26)$$

Expandindo $\rho^{1/n-1}$,

$$\rho^{1/n-1} = \rho_C^{1/n-1} (y^n)^{1/n-1} = \rho_C^{1/n-1} y^{1-n}, \quad (3.27)$$

e multiplicando o resultado por $\frac{d\rho}{dr}$ chega-se a

$$\rho^{1/n-1} \frac{d\rho}{dr} = \rho_C^{1/n-1} y^{1-n} n \rho_C y^{n-1} \frac{dy}{dx} a \Rightarrow \rho^{1/n-1} \frac{d\rho}{dr} = n \rho_C^{1/n} \frac{dy}{dx} a. \quad (3.28)$$

Multiplicando esse resultado por r^2 e Fazendo algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$r^2 \rho^{1/n-1} \frac{d\rho}{dr} = \frac{x^2}{a^2} n \rho_C^{1/n} \frac{dy}{dx} a \Rightarrow r^2 \rho^{1/n-1} \frac{d\rho}{dr} = \frac{x^2}{a} n \rho_C^{1/n} \frac{dy}{dx}. \quad (3.29)$$

A derivada dessa equação com relação a r é

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \rho^{1/n-1} \frac{d\rho}{dr} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{a} n \rho_C^{1/n} \frac{dy}{dx} \right) \frac{dx}{dr} = \frac{n \rho_C^{1/n}}{a} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) a = n \rho_C^{1/n} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right). \quad (3.30)$$

Substituindo esse resultado em (3.21), resulta em

$$n \rho_C^{1/n} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -\frac{n}{n+1} \frac{4\pi G}{K} \frac{x^2}{a^2} \rho_C y^n \Rightarrow \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -\frac{4\pi G}{K} \frac{\rho_C^{1-1/n}}{n+1} \frac{y^n}{a^2}. \quad (3.31)$$

Se nessa equação, for assumido que

$$a^2 = \frac{4\pi G}{K} \frac{\rho_C^{1-1/n}}{n+1}, \quad (3.32)$$

então

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -y^n. \quad (3.33)$$

Além disso, é possível definir uma variável v tal que

$$x^2 \frac{dy}{dx} = -v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{v}{x^2}, \quad (3.34)$$

resultando em

$$\frac{1}{x^2} \frac{d(-v)}{dx} = -y^n \Rightarrow \frac{dv}{dx} = x^2 y^n. \quad (3.35)$$

As equações (3.34) e (3.35) são o sistema de equação a ser resolvido para uma estrela politrópica não-relativística. A qual deve estar sujeita às condições de contorno

$$v(0) = 0 \quad (3.36)$$

e

$$y(0) = 1. \quad (3.37)$$

Pois $r \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0 \Rightarrow v \rightarrow 0$.

3.5 Estrelas Politrópicas Relativísticas

As equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para um material isotrópico e esfericamente simétrico são dadas por

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G(\rho(r) + P(r)/c^2)(m(r) + 4\pi P(r)r^3/c^2)}{r^2(1 - 2Gm(r)/(rc^2))}. \quad (3.38)$$

e

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2. \quad (3.39)$$

Fazendo a troca de variáveis

$$\rho = \rho_C y^n, \quad (3.40)$$

e

$$r = \frac{x}{a}. \quad (3.41)$$

Definindo a variável σ tal que

$$\sigma = \frac{K\rho_C^{1/n}}{c^2}, \quad (3.42)$$

resulta em

$$\rho_C = (\sigma c^2/K)^n. \quad (3.43)$$

Definindo a tal que

$$a^2 = 4\pi G \frac{1}{n+1} (c^2/K)^n \sigma^{n-1}, \quad (3.44)$$

e utilizando cálculos análogos aos realizados na seção anterior, chega-se ao sistema de equações diferenciais

$$\frac{dv}{dx} = x^2 y^n \quad (3.45)$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-v - \sigma x^3 y^{n+1})(1 + \sigma y)}{x^2 - 2\sigma(n+1)vx} \quad (3.46)$$

sujeito às condições

$$v(0) = 0 \quad (3.47)$$

e

$$y(0) = 1. \quad (3.48)$$

Mais detalhes sobre o modelo para estrelas politrópicas relativísticas podem ser encontrados em (BLUDMAN, 1973). Nesse artigo é apresentada a fórmula da massa total de uma estrela politrópica relativística:

$$M = \sigma^{(3-n)/2} v(R) \sqrt{\frac{1}{4\pi} \left(\frac{(n+1)c^2}{G} \right)^3 \left(\frac{K}{c^2} \right)^n}, \quad (3.49)$$

assim como, a variável μ

$$\mu = \sigma^{(3-n)/2} v(R) = \frac{M}{\sqrt{\frac{1}{4\pi} \left(\frac{(n+1)c^2}{G} \right)^3 \left(\frac{K}{c^2} \right)^n}}. \quad (3.50)$$

4 Resultados

4.1 Método Runge-Kutta-Fehlberg

O método Runge-Kutta quártico (RK4) é utilizado na solução do problema de valor inicial com equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (4.1)$$

sujeita à condição inicial

$$y(x_0) = y_0. \quad (4.2)$$

Esse problema de valor inicial é descrito pelo método RK4 como

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (4.3)$$

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Detalhes sobre a dedução dessas fórmulas e implementação do algoritmo do método podem ser encontrados na referência (BURDEN; FAIRES, 2008).

Erros de arredondamento menores podem ser obtidos quando métodos de passo adaptativo são utilizados, como o método Runge-Kutta-Fehlberg, que é a versão de passo adaptativo do método Runge-Kutta, cujo algoritmo é mostrado a seguir:

- Primeiro passo: dada uma equação diferencial $f(x, y)$, sujeita a uma condição inicial $y_0 = y(x_0)$, com $x \in [a, b]$, nível de tolerância TOL, e passos espaciais máximo e mínimo h_{max} e h_{min} .
- Segundo passo: calcule $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$ e

$$r = \frac{1}{h} \left| \frac{1}{360}K_1 - \frac{128}{4275}K_3 - \frac{2197}{75240}K_4 + \frac{1}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6 \right| \quad (4.6)$$

- Terceiro passo: se $r < TOL$ então atualize w e incremente x ; caso contrário faça

$$\delta = 0.84 \times (TOL/r)^{1/4} \quad (4.7)$$

e $h = 0.1h$ (se $\delta < 0.1$), $h = 4h$ (se $\delta > 4$) ou $h = \delta h$ (se $0.1 < \delta < 4$).

- Quarto passo: repita enquanto $t < b$ e $h_{min} < h < h_{max}$.

Para encontrar y nos problemas de valor inicial para estrelas politrópicas relativísticas e não-relativísticas faz-se necessária uma terceira condição parada, dada por

```
if (y.le.1e-4) then
  flag=0
endif
```

que assegura que apenas soluções restritas ao interior da esfera serão obtidas, pois $y(R) = 0$, onde R é o raio da estrela.

Além disso, os modelos de estrelas politrópicas são sistemas formados por duas equações de primeira ordem com variáveis dependentes $v(x)$ e $y(x)$, portanto, no segundo passo aparecem duas variáveis ry e rv :

$$\begin{aligned} ry &= \frac{1}{h} \left| \frac{1}{360} Ky_1 - \frac{128}{4275} Ky_3 - \frac{2197}{75240} Ky_4 + \frac{1}{50} Ky_5 + \frac{2}{55} Ky_6 \right| \\ rv &= \frac{1}{h} \left| \frac{1}{360} Kv_1 - \frac{128}{4275} Kv_3 - \frac{2197}{75240} Kv_4 + \frac{1}{50} Kv_5 + \frac{2}{55} Kv_6 \right|, \end{aligned} \quad (4.8)$$

e a variável r , utilizada na comparação com TOL no terceiro, é definida como o maior valor dentre ry e rv : $r = \max(ry, rv)$. Os demais detalhes de implementação para o caso de sistemas de equações diferenciais coincide com os utilizados para o método RK4, apresentado na página 303 da referência (BURDEN; FAIRES, 2008).

O resultado de saída são três arrays contendo os valores de x , y e v . Se $imax$ é o maior índice desses arrays, $x(imax) = a \times R$, $y(imax) = 0$ e $v(imax) = v(R)$. A partir das equações obtidas no capítulo anterior, tem-se que o cálculo de a , do raio e da massa são dados por

```
if (flagIsRelativistico) then
a=sqrt((4.0*acos(-1.0d0)*G)/c**2*(1.0/(n+1.0))&
*((c**2/K)**n)*(sigma**(n-1)))
M=sqrt(1.0/(4.0*acos(-1.0d0))*((n+1.0)*c**2/G)**3&
*(K/c**2)**n)*sigma**((3.0-n)/2.0)*vetorv(imax)
else
a=sqrt((4.0*acos(-1.0d0)*G*rho_c**(1.0-1.0/n))/(n+1.0)/K)
M=4.0*acos(-1.0d0)*rho_c*vetorv(imax)/a**3
end if
```

Foi criada a a variável lógica *flagIsRelativistico*, que assume valor *.true.* para o caso da estrela politrópica ser relativística; caso contrário, *flagIsRelativistico* = *.false.*

4.2 Validação do Código para Estrela Politrópica Não-Relativística

A partir do programa desenvolvido para a solução do modelo de estrela politrópica não-relativística pelo método de Runge-Kutta-Fehlberg, os resultados obtidos foram comparados com aqueles fornecidos pelas soluções analíticas, existentes para os casos $n = 0$, $n = 1$ e $n = 5$, disponíveis na referência (MACIEL, 1999), e para o caso $n = 3$, sem solução analítica, mas com resultados apresentados na página 91 da mesma referência, os quais foram extraídos através do programa xyscan (<http://rhig.physics.yale.edu/ullrich/software/xyscan/>). Esses resultados são mostrados na Figura 1.

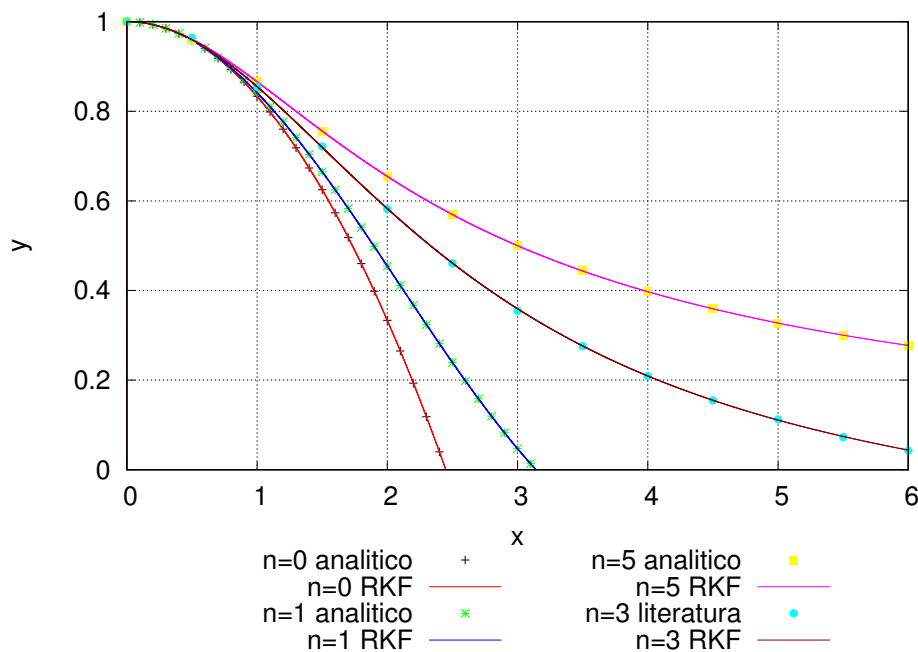


Figura 1 – A partir do programa desenvolvido para a solução do modelo de estrela politrópica não-relativística pelo método de Runge-Kutta-Fehlberg, os resultados obtidos foram comparados com aqueles fornecidos pelas soluções analíticas, existentes para os casos $n = 0$, $n = 1$ e $n = 5$, disponíveis na referência (MACIEL, 1999), e para o caso $n = 3$, sem solução analítica, mas com resultados apresentados na página 91 da mesma referência, os quais foram extraídos através do programa xyscan (<http://rhig.physics.yale.edu/ullrich/software/xyscan/>)

A solução analítica para $n = 0$ é dada por

$$y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2. \quad (4.9)$$

A solução analítica para $n = 1$ é dada por

$$y(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}. \quad (4.10)$$

A solução analítica para $n = 5$ é dada por

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}}}. \quad (4.11)$$

Os valores de K e ρ_C associados com uma estrela com o raio e massa do sol, para uma estrela politrópica com $n = 1$, são $K = 2.06 \times 10^7 Nm^4/kg^2$ e $\rho_C = 4640.0kg/m^3$. Para $n = 3$ esses valores são $K = 3.84 \times 10^9 Nm^2/kg^{\frac{4}{3}}$ e $\rho_C = 76400.0kg/m^3$. Quando esses valores foram colocados no programa, foram obtidos os resultados mostrados nas figuras 2 e 3, respectivamente.

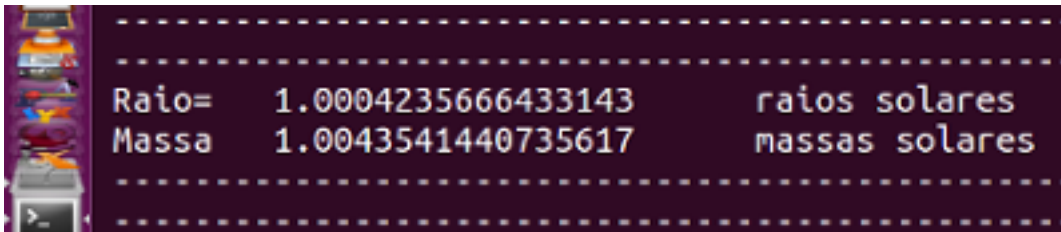


Figura 2 – Raio e massa para uma estrela politrópica com $n = 1$ para $K = 2.06 \times 10^7 Nm^4/kg^2$ e $\rho_C = 4640.0kg/m^3$

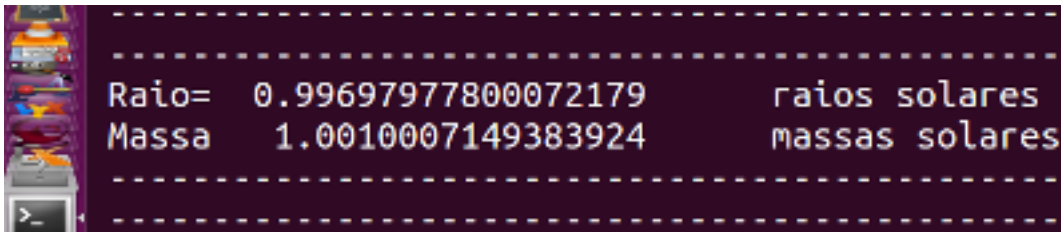


Figura 3 – Raio e massa para uma estrela politrópica com $n = 1$ para $K = 3.84 \times 10^9 Nm^2/kg^{\frac{4}{3}}$ e $\rho_C = 76400.0kg/m^3$.

A partir dos gráficos apresentados, constata-se que os resultados obtidos aqui estão de acordo com as soluções analíticas e com os resultados disponibilizados na referência (MACIEL, 1999).

O código fonte do programa utilizado na obtenção desses resultados encontra-se no apêndice A.

4.3 Validação do Código para Estrela Politrópica Relativística

A partir do programa desenvolvido para a solução do modelo de estrela politrópica relativística pelo método de Runge-Kutta-Fehlberg, os resultados obtidos foram comparados

com dados da literatura, disponíveis na referência (BLUDMAN, 1973). Na Figura 4, é mostrada a comparação dos valores de μ da equação (3.50) obtidos utilizando os valores obtidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com os valores disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973). Na Figura 5, é mostrada a comparação dos valores de $v(x)$ obtidos utilizando os valores obtidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com os valores disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973). Na Figura 6, é mostrada a comparação dos valores de x obtidos utilizando os valores obtidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com os valores disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973). Na Tabela 1, é mostrada a comparação dos valores de x e $v(x)$ obtidos utilizando os valores obtidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com os valores disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973), para $n = 3$.

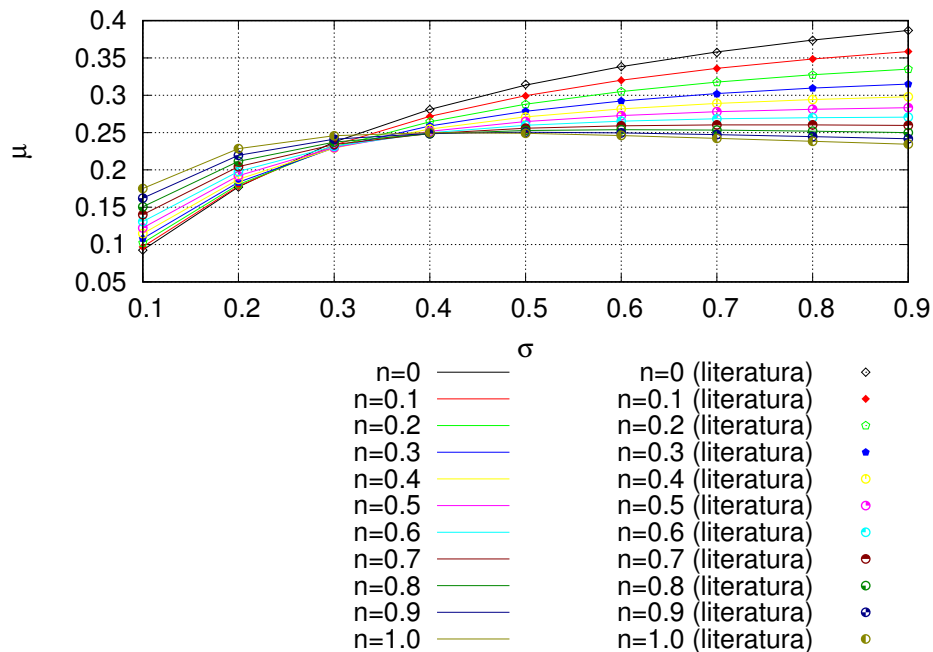


Figura 4 – Comparação dos valores de μ da equação (3.50) obtidos utilizando os valores obtidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com os valores disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973)

A partir dos gráficos e da tabela apresentados, constata-se que os resultados obtidos aqui estão de acordo com os resultados disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973).

O código fonte do programa utilizado na obtenção desses resultados encontra-se no apêndice B.

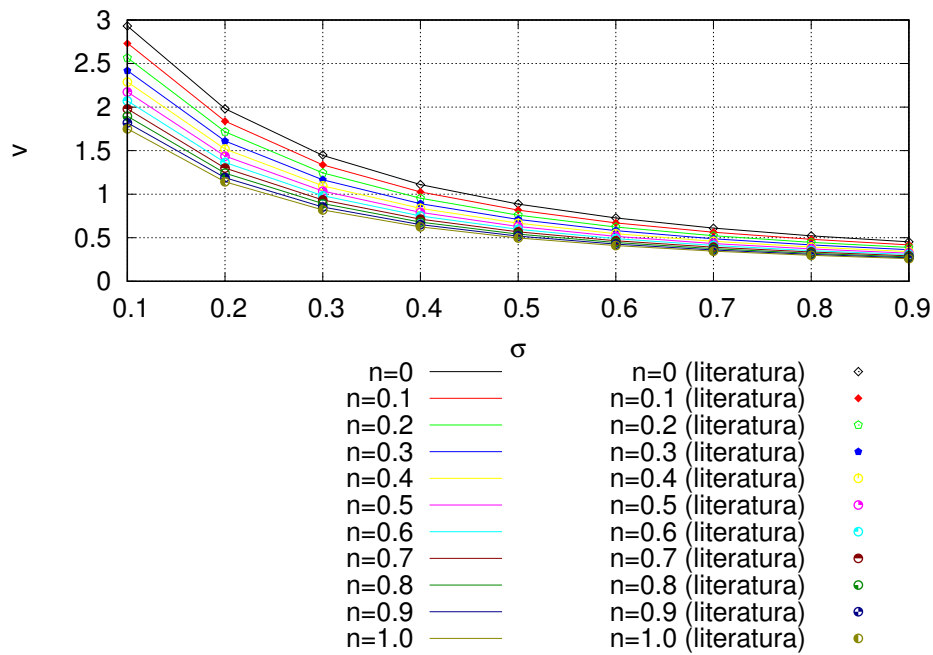


Figura 5 – Comparação dos valores de $v(x)$ obtidos utilizando os valores obtidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com os valores disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973)

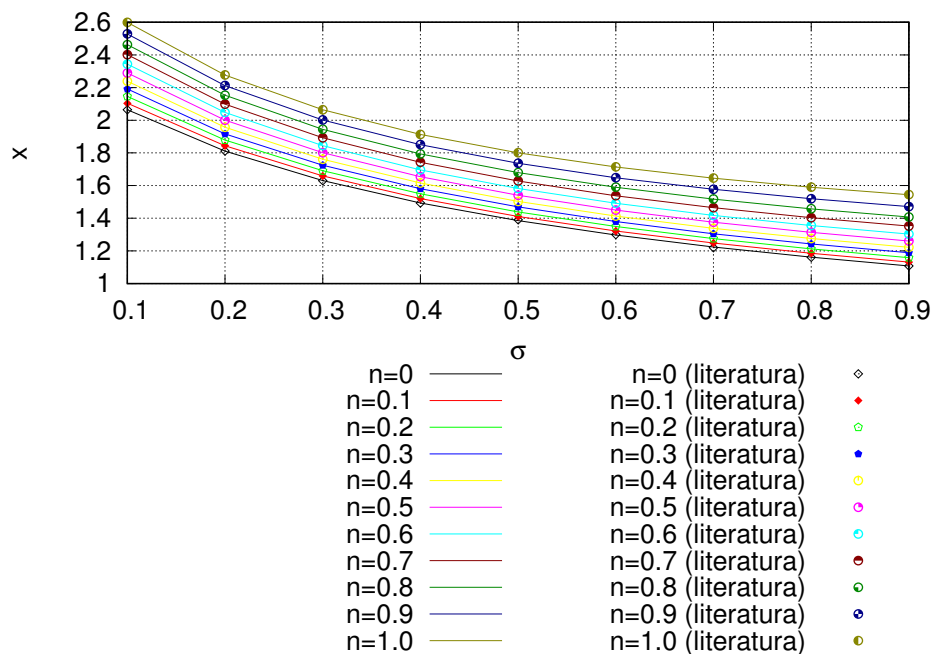


Figura 6 – Comparação dos valores de x obtidos utilizando os valores obtidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com os valores disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973)

σ	ξ	ξ (literatura)	$v(\xi)$	$v(\xi)$ (literatura)
0.1	6.8221	6.8289	1.0785	1.0787
0.2	7.9431	7.9525	0.7130	0.7133
0.3	10.8136	10.830	0.5386	0.5388
0.4	17.7553	17.799	0.4516	0.4517
0.5	36.8949	37.104	0.4214	0.4214
0.6	89.3052	90.749	0.4493	0.4490
0.7	157.8021	162.34	0.5266	0.5260
0.8	181.6475	187.27	0.5969	0.5964
0.9	181.8463	187.17	0.6375	0.6372

Tabela 1 – Comparação dos valores de x e $v(x)$ obtidos utilizando os valores obtidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com os valores disponibilizados na referência (BLUDMAN, 1973), para $n = 3$

4.4 Curvas de Massa em função do Raio

Foi desenvolvido um programa para a solução dos sistemas de equações diferenciais dos modelos de estrelas politrópicas relativísticas e não-relativísticas, para índice politrópico $n = 1.5$, $K = 5.3802 \times 10^3 Nm^3/kg^{5/3}$ e densidade central ρ_c variando de $1 \times 10^{16} Kg/m^3$ a $1 \times 10^{20} Kg/m^3$. Os sistemas de equações diferenciais são resolvidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com passo espacial máximo de $hmax = 1 \times 10^{-5}$, passo espacial mínimo de $hmin = 1 \times 10^{-15}$ e tolerância $tol = 1 \times 10^{-6}$. Os resultados são apresentados na Figura 7. O código fonte do programa utilizado na obtenção desses resultados encontra-se no apêndice C.

No programa, os valores de ρ_c são varridos do maior para o menor valor pelo laço de repetição

```
double precision, parameter :: rho_c1=1e16, rho_c2=1e20
integer, parameter :: nrho_c=200
...
do j=nrho_c,1,-1
rho_c = rho_c1 + (rho_c2-rho_c1)*(dfloat(j-1)/dfloat(nrho_c-1))*n
...
end do
```

Todavia, os valores de raios das estrelas armazenados nos arquivos de saída estão em ordem crescente. Dessa forma, maiores densidades correspondem a menores raios. A partir das curvas da Figura 7 é possível constatar que para baixas densidades, as curvas raio-massa para os modelos de estrelas politrópicas relativísticas e não-relativísticas coincidem para baixas densidades. A seu turno, para maiores densidades, essas curvas distanciam-se bastante. Nota-se que a relação raio-massa para uma estrela relativística,

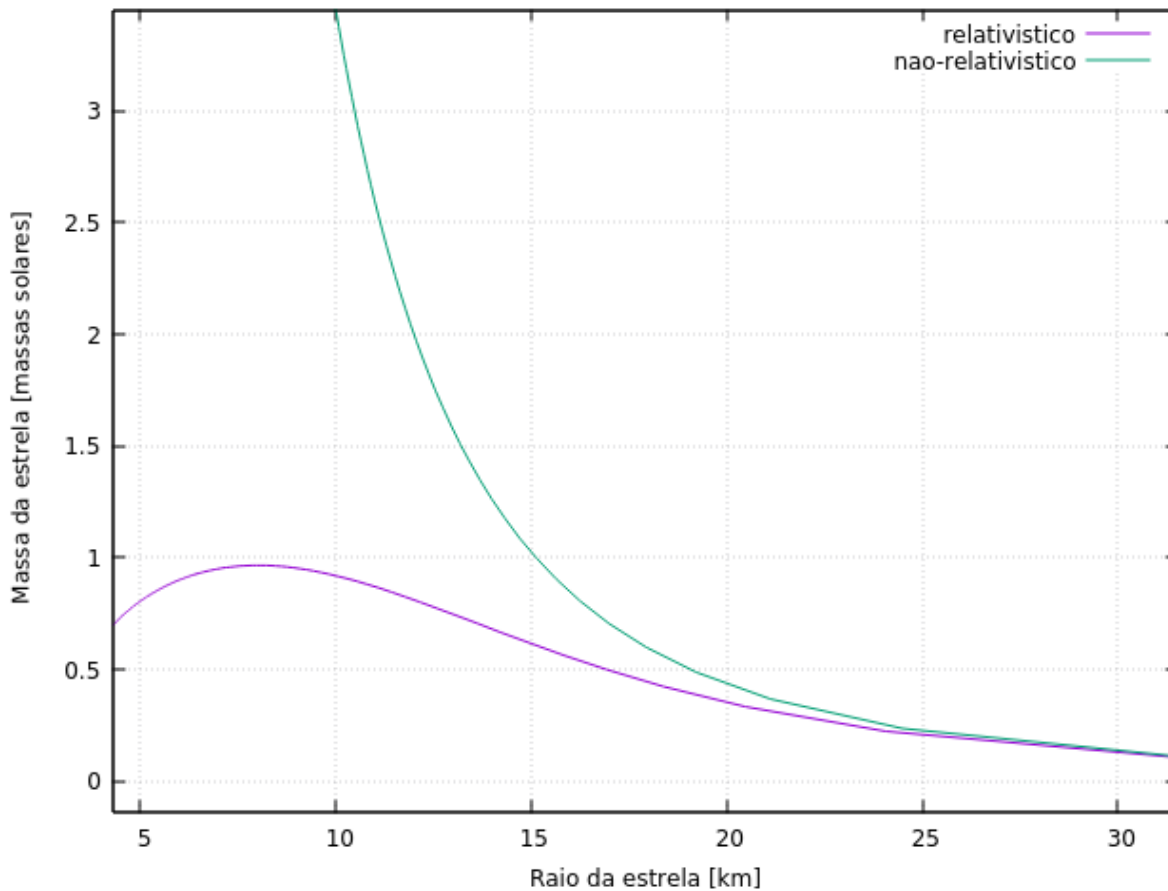


Figura 7 – Curvas de Massa (em massas solares) em função do Raio (em km) obtidas através do método de Runge-Kutta-Fehlberg.

diferentemente do que ocorre para o caso não-relativístico, possui um máximo para a massa.

Segundo Schutz (SCHUTZ, 2003), apesar do modelo de estrela politrópica relativística ser bastante simplificado, ele possui uma importante qualidade para que possa ser utilizado como uma primeira aproximação no modelamento de estrelas de nêutrons: a garantia da existência de um máximo de massa. De acordo com esse autor, a existência de um máximo para a massa de uma estrela de nêutrons assegura que uma nuvem de gás com massa superior a esse máximo irá colapsar para um buraco negro. Esse fato garante a existência de buracos negros. Ainda segundo Schutz, a existência de um máximo significa que existem dois possíveis modelos para uma estrela com uma dada massa, um modelo estável, de menor densidade, localizado à direita do ponto de máximo; e um modelo instável (que pode evoluir para o modelo estável com o aumento do raio e redução da densidade ou pode colapsar), de maior densidade, localizado à esquerda do ponto de máximo.

Conclusão

Esta monografia apresenta um material introdutório sobre a teoria da relatividade geral, que buscou apresentar os conceitos de forma concisa e acessível aos alunos que estejam finalizando o curso de licenciatura em física. Foram abordados os temas centrais, como: princípio da equivalência, variedade diferenciável, vetores, 1-Formas, tensores, equações tensoriais e covariância das leis da física, tensor métrico, símbolos de Christoffel, tensor de energia-momento, transporte paralelo, tensor de curvatura de Riemann, tensor de Ricci, tensor de Einstein, relação entre gravidade e espaço-tempo curvo e as equações de campo de Einstein.

Neste trabalho, a dedução da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff é apresentada de maneira detalhada. Obteve-se a expressão da métrica associada a um objeto material estático e esfericamente simétrico, e calculou-se os coeficientes da métrica inversa, as derivadas da métrica com relação às coordenadas, os símbolos de Christoffel, o tensor de curvatura de Riemann, o tensor de Ricci covariante, o tensor de Ricci misto, o tensor de Einstein misto e o tensor de energia-momento misto. Dessa forma, foi possível obter as equações de campo de Einstein, a partir das quais encontrou-se a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

A partir das expressões para as equações de estado para uma estrela politrópica e da lei da gravitação universal de Newton, deduziu-se as expressões para o problema de valor de contorno que constitui o modelo de estrela politrópica não-relativística. Além disso, utilizando as expressões das equações de estado para uma estrela politrópica e a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, deduziu-se as expressões para o problema de valor de contorno que constitui o modelo de estrela politrópica relativística.

Foram desenvolvidos códigos implementando o método Runge-Kutta-Fehlberg para a solução de um sistema de duas equações diferenciais sujeitas a condições de contorno. Os programas foram desenvolvidos em linguagem de programação FORTRAN90.

Inicialmente foi desenvolvido um programa para a solução do modelo de estrela politrópica não-relativística pelo método de Runge-Kutta-Fehlberg. Os resultados obtidos para os índices politrópicos $n = 0$, $n = 1$ e $n = 3$ estão de acordo com as soluções analíticas, existentes apenas para esses três casos. Foi simulado também o caso para $n = 3$, cujos resultados coadunam com aqueles disponíveis na literatura. Utilizando os valores $n = 1$, $K = 2.06 \times 10^7 Nm^4/kg^2$ e $\rho_C = 4640.0kg/m^3$, e depois, $n = 3$, $K = 3.84 \times 10^9 Nm^2/kg^3$ e $\rho_C = 76400.0kg/m^3$, foram obtidos raio e massa iguais ao do sol. Esses resultados também estão de acordo com os da literatura. O programa utilizado na obtenção desses resultados foi disponibilizado no apêndice [A](#).

Em seguida foi desenvolvido um programa para a solução do modelo de estrela politrópica relativística pelo método de Runge-Kutta-Fehlberg. São obtidos três variáveis para os índices politrópicos $n = 0.1, n = 0.2, n = 0.3, n = 0.4, n = 0.5, n = 0.6, n = 0.7, n = 0.8, n = 0.9, n = 1.0$ e $n = 3.0$, a quais coincidem com os resultados encontrados na literatura. Nessas simulações foi utilizado o parâmetro $K = 1.30680357 \times 10^{15} m^5 kg^{-1} s^{-4}$ e o parâmetro σ variando de 0.1 a 0.9. Esses resultados também estão de acordos com os da literatura. O programa utilizado na obtenção desses resultados foi disponibilizado no apêndice B.

Finalmente foi desenvolvido um programa para a solução dos sistemas de equações diferenciais dos modelos de estrelas politrópicas relativísticas e não-relativísticas, para índice politrópico $n = 1.5$, $K = 5.3802 \times 10^3 Nm^3/kg^{5/3}$ e densidade central ρ_c variando de $1 \times 10^{16} Kg/m^3$ a $1 \times 10^{20} Kg/m^3$. Os sistemas de equações diferenciais foram resolvidos via método de Runge-Kutta-Fehlberg com passo espacial máximo de $hmax = 1 \times 10^{-5}$, passo espacial mínimo de $hmin = 1 \times 10^{-15}$ e tolerância $tol = 1 \times 10^{-6}$. Foram plotados 200 pontos da curva de massa em função do raio. Nos resultados obtidos, constata-se que os modelos de estrelas politrópicas relativística e não-relativística coincidem para baixos valores de densidade e apresentam grandes diferenças para altas densidades. Essa diferença entre as massas para um mesmo raio está de acordo com o previsto na literatura. Também constatou-se que diferentemente do modelo não-relativístico, o modelo relativístico apresenta um máximo, que separa as regiões instável e estável, e que é necessário, por exemplo, para modelar estrelas de nêutrons, pois, quando uma nuvem de gás deve colapsar para um buraco negro quando sua massa exceder aquele máximo. A existência desses máximos para o modelo relativístico também está de acordo com o que é previsto na literatura. O programa utilizado na obtenção desses resultados foi disponibilizado no apêndice C.

Referências

- BLUDMAN, S. A. Stability of General-Relativistic Polytropes. *Astrophysical Journal*, v. 183, p. 637–648, 1973. Citado 6 vezes nas páginas 15, 17, 57, 63, 64 e 65.
- BURDEN, R.; FAIRES, J. *Análise numérica*. Cengage Learning, 2008. ISBN 9788522106011. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=pf8XPwAACAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 60.
- CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. ISBN 9780805387322. Citado 3 vezes nas páginas 33, 40 e 52.
- MACIEL, W. *Introdução à Estrutura e Evolução Estelar Vol. 24*. EDUSP, 1999. (Acadêmica, n.24). ISBN 9788531405204. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ZtMJ_kYoK2gC>. Citado 4 vezes nas páginas 15, 53, 61 e 62.
- MCCMAHON, D.; ALSING, P. *Relativity Demystified*. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2005. (Demystified). ISBN 9780071486736. Citado na página 33.
- SCHUTZ, B. *Gravity from the Ground Up: An Introductory Guide to Gravity and General Relativity*. Cambridge University Press, 2003. ISBN 9780521455060. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=P_T0xxhDcsIC>. Citado na página 66.
- WEBER, F. *INTRODUÇÃO A RELATIVIDADE GERAL E Á FÍSICA DE ESTRELAS COMPACTAS*. [S.l.]: editora livraria da fisica, 2015. ISBN 9788578613327. Citado na página 38.
- WEBER, F. *Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*. [S.l.]: CRC Press, 2017. (Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation). ISBN 9781351420945. Citado na página 41.

Apêndices

APÊNDICE A – Validação do programa para estrela politrópica não-relativística

```
! Validação para estrela politrópica não-relativística
! PELO MÉTODO DE RungeKuttaFehlberg
! AUTORES: TIAGO CARVALHO MARTINS e FABRÍCIO MACÊDO BARROS

program EstrelaPolitropicaNaoRelativistica
implicit none
double precision, parameter :: G = (20.0/3.0)*1e-11
double precision, parameter :: c = 3e8
double precision :: K
double precision :: rho_c
real :: n
double precision v
double precision y
double precision, parameter :: ximax = 20.0
double precision, parameter :: hmax = 1e-5
integer, parameter :: nmax = int(ximax/hmax)
double precision, parameter :: hmin = 1e-15
double precision, parameter :: tol = 1e-6
integer imax
double precision xi
double precision h
double precision auxv, auxy
double precision k1v, k1y, k2v, k2y, k3v, k3y
double precision k4v, k4y, k5v, k5y, k6v, k6y
double precision dv, dy
double precision, dimension(nmax):: vetorxi, vetorv, vetory
double precision rv, ry, delta, r, hacum
integer i, j
double precision a, Massa, Raio
logical:: flag

n = 3
```

```
if (n.eq.1) then
! Valores associados com uma estrela com o raio e massa do sol para n=1
! Página 90 do Walter J. Maciel
K = 2.06e7 ! N m^4 / kg^2
rho_c = 4640.0 ! kg / m^3
else if (n.eq.3) then
! Valores associados com uma estrela com o raio e massa do sol para n=3
! Página 90 do Walter J. Maciel
K = 3.84e9 ! N m^2 / kg^(4/3)
rho_c = 76400.0 ! kg / m^3
end if

open(1,file="outRungeKuttaFehlberg"//char(ifix(n)+48)//".txt" )
open(2,file="outAnalitica"//char(ifix(n)+48)//".txt" )

h = hmax
i=0
xi=1e-40
flag = .true.
v = 0.0
y = 1.0
imax = 0
hacum = 0.0

do while (flag)
!-----
! Calcular k1v e k1y
!-----
auxv = v
auxy = y
dv = (xi**2*auxy**n)
dy = (-auxv/xi**2)
k1v = h * dv
k1y = h * dy
```

```

!-----
! Calcular k2v e k2y
!-----
auxv = v + k1v/4.0
auxy = y + k1y/4.0
k2v = h * (xi**2*auxy**n)
k2y = h * (-auxv/xi**2)

!-----
! Calcular k3v e k3y
!-----
auxv = v + (3.0/32.0)*k1v + (9.0/32.0)*k2v
auxy = y + (3.0/32.0)*k1y + (9.0/32.0)*k2y
k3v = h * (xi**2*auxy**n)
k3y = h * (-auxv/xi**2)

!-----
! Calcular k4v e k4y
!-----
auxv = v + (1932.0/2197.0)*k1v - (7200.0/2197.0)*k2v &
      + (7296.0/2197.0)*k3v
auxy = y + (1932.0/2197.0)*k1y - (7200.0/2197.0)*k2y &
      + (7296.0/2197.0)*k3y
k4v = h * (xi**2*auxy**n)
k4y = h * (-auxv/xi**2)
!
!-----
! Calcular k5v e k5y
!-----
auxv = v + (439.0/216.0)*k1v - 8.0*k2v + (3680.0/513.0)*k3v &
      - (845.0/4104.0)*k4v
auxy = y + (439.0/216.0)*k1y - 8.0*k2y + (3680.0/513.0)*k3y &
      - (845.0/4104.0)*k4y
k5v = h * (xi**2*auxy**n)
k5y = h * (-auxv/xi**2)

```

```

!-----
! Calcular k6v e k6y
!-----
auxv = v - (8.0/27.0)*k1v + 2.0*k2v - (3544.0/2565.0)*k3v &
      + (1859.0/4104.0)*k4v - (11.0/40.0)*k5v
auxy = y - (8.0/27.0)*k1y + 2.0*k2y - (3544.0/2565.0)*k3y &
      + (1859.0/4104.0)*k4y - (11.0/40.0)*k5y
k6v = h * (xi**2*auxy**n)
k6y = h * (-auxv/xi**2)

v = v + 25.0/216.0*k1v+1408.0/2565.0*k3v+2197.0/4104.0*k4v &
      -1.0/5.0*k5v
y = y + 25.0/216.0*k1y+1408.0/2565.0*k3y+2197.0/4104.0*k4y &
      -1.0/5.0*k5y

rv = abs((1.0/360.0)*k1v-(128.0/4275.0)*k3v-(2197.0/75240.0)*k4v &
      +(1.0/50.0)*k5v+(2.0/55.0)*k6v)/h
ry = abs((1.0/360.0)*k1y-(128.0/4275.0)*k3y-(2197.0/75240.0)*k4y &
      +(1.0/50.0)*k5y+(2.0/55.0)*k6y)/h
r = max(rv,ry)

```

```
if (r.le.tol) then
xi = xi + h
hacum = hacum + h
if (hacum.ge.hmax) then
hacum = 0.0
i = i+1
write(*,*) i
vetorxi(i)=xi
vetorv(i)=v
vetory(i)=y
! Salvando dados
write(1,*) vetorxi(imax), vetory(imax)
  if (n.eq.0) then
    write(2,*) vetorxi(imax), 1.0-(1.0/6.0)*vetorxi(imax)**2
  else if (n.eq.1) then
    write(2,*) vetorxi(imax), sin(vetorxi(imax))/vetorxi(imax)
  else if (n.eq.5) then
    write(2,*) vetorxi(imax), 1.0/sqrt(1.0+vetorxi(imax)**2/3.0)
  else
    write(2,*) vetorxi(imax), "nan"
  end if
! y=0 em xi=R:
  if (y.le.1e-3) then
    flag=.false.
  endif
end if
end if
imax = i

delta = 0.84*sqrt(sqrt(tol/r))

if (delta.le.0.1) then
h = 0.1*h
else if (delta.ge.4.0) then
h = 4.0*h
else
h = delta*h
end if
```



```
if (h.gt.hmax) then
h = hmax
end if

if (xi.ge.ximax) then
flag = .false.
else if (xi+h.gt.ximax) then
h = ximax - xi
else if (h.lt.hmin) then
flag=.false.
end if

end do

close(1)
close(2)

if ((n.eq.1).or.(n.eq.3)) then
a=sqrt((4.0*acos(-1.0d0)*G*rho_c**(1.0-1.0/n))/(n+1.0)/K)
Massa=4.0*acos(-1.0d0)*rho_c*vetorv(imax)/a**3
Raio=vetorxi(imax)/a
Write(*,*) "-----"
Write(*,*) "-----"
Write(*,*) "Raio=",Raio/695700000.0,"raios solares"
Write(*,*) "Massa",Massa/1.9891e30,"massas solares"
Write(*,*) "-----"
Write(*,*) "-----"
end if

end program EstrelaPolitropicaNaoRelativistica
```


APÊNDICE B – Validação do programa para estrela politrópica relativística

```

! Validação da SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE Tolman-Oppenheimer-Volkoff
! PELO MÉTODO DE RungeKuttaFehlberg
! AUTORES: TIAGO CARVALHO MARTINS e FABRÍCIO MACÊDO BARROS
program TolmanOppenheimerVolkoffByRungeKuttaFehlberg
implicit none
double precision, parameter :: G = (20.0/3.0)*1e-11
double precision, parameter :: c = 3e8
double precision, parameter :: K = 217.86*1e6*c*c*G
real, parameter :: n = 3.0
double precision sigma
double precision, parameter :: sigma1=0.1, sigma2=0.9
integer, parameter :: nsigma=9
double precision v
double precision y
double precision, parameter :: ximax = 200.0
double precision, parameter :: hmax = 1e-5
integer, parameter :: nmax = int(ximax/hmax)
double precision, parameter :: hmin = 1e-15
double precision, parameter :: tol = 1e-6
integer imax
double precision xi
integer flag
double precision h
double precision auxv, auxy
double precision k1v, k1y, k2v, k2y, k3v, k3y
double precision k4v, k4y, k5v, k5y, k6v, k6y
double precision dv, dy
double precision, dimension(nmax):: vetorxi, vetorv, vetory
double precision rv, ry, delta, r, hacum
integer i, j
double precision a, M, mu
character(1):: intpart_n, fracpart_n

```

```

intpart_n=char(ifix(n)+48)
fracpart_n=char(ifix(n*10-ifix(n)*10)+48)
write(*,*) intpart_n, fracpart_n
open(1,file="n"//intpart_n//"p"//fracpart_n//".txt" )

do j=1,nsigma

sigma = sigma1 + (sigma2-sigma1)*dfloat(j-1)/dfloat(nsigma-1)
h = hmax
i=0
xi=1e-40
flag = 1
v = 0.0
y = 1.0
imax = 0
hacum = 0.0

do while (flag .eq. 1)
!-----
! Calcular k1v e k1y
!-----
auxv = v
auxy = y
dv = (xi**2*auxy**n)
dy = ((-auxv- sigma*xi**3*auxy**(n+1)) &
      *(1+sigma*auxy)/(xi**2-2*sigma*(n+1)*auxv*xi))
k1v = h * dv
k1y = h * dy

!-----
! Calcular k2v e k2y
!-----
auxv = v + k1v/4.0
auxy = y + k1y/4.0
k2v = h * (xi**2*auxy**n)
k2y = h * ((-auxv- sigma*xi**3*auxy**(n+1)) &
          *(1+sigma*auxy)/(xi**2-2*sigma*(n+1)*auxv*xi))

```

```

!-----
! Calcular k3v e k3y
!-----
auxv = v + (3.0/32.0)*k1v + (9.0/32.0)*k2v
auxy = y + (3.0/32.0)*k1y + (9.0/32.0)*k2y
k3v = h * (xi**2*auxy**n)
k3y = h * ((-auxv- sigma*xi**3*auxy**(n+1)) &
          *(1+sigma*auxy)/(xi**2-2*sigma*(n+1)*auxv*xi))

!-----
! Calcular k4v e k4y
!-----
auxv = v + (1932.0/2197.0)*k1v &
      - (7200.0/2197.0)*k2v + (7296.0/2197.0)*k3v
auxy = y + (1932.0/2197.0)*k1y &
      - (7200.0/2197.0)*k2y + (7296.0/2197.0)*k3y
k4v = h * (xi**2*auxy**n)
k4y = h * ((-auxv- sigma*xi**3*auxy**(n+1)) &
          *(1+sigma*auxy)/(xi**2-2*sigma*(n+1)*auxv*xi))
!
!-----
! Calcular k5v e k5y
!-----
auxv = v + (439.0/216.0)*k1v - 8.0*k2v &
      + (3680.0/513.0)*k3v - (845.0/4104.0)*k4v
auxy = y + (439.0/216.0)*k1y - 8.0*k2y &
      + (3680.0/513.0)*k3y - (845.0/4104.0)*k4y
k5v = h * (xi**2*auxy**n)
k5y = h * ((-auxv- sigma*xi**3*auxy**(n+1)) &
          *(1+sigma*auxy)/(xi**2-2*sigma*(n+1)*auxv*xi))

```

```

!-----
! Calcular k6v e k6y
!-----
auxv = v - (8.0/27.0)*k1v + 2.0*k2v &
      - (3544.0/2565.0)*k3v + (1859.0/4104.0)*k4v - (11.0/40.0)*k5v
auxy = y - (8.0/27.0)*k1y + 2.0*k2y &
      - (3544.0/2565.0)*k3y + (1859.0/4104.0)*k4y - (11.0/40.0)*k5y
k6v = h * (xi**2*auxy**n)
k6y = h * ((-auxv- sigma*xi**3*auxy**(n+1)) &
      *(1+sigma*auxy)/(xi**2-2*sigma*(n+1)*auxv*xi))

v = v + 25.0/216.0*k1v+1408.0/2565.0*k3v+2197.0/4104.0*k4v &
      -1.0/5.0*k5v
y = y + 25.0/216.0*k1y+1408.0/2565.0*k3y+2197.0/4104.0*k4y &
      -1.0/5.0*k5y

rv = abs((1.0/360.0)*k1v-(128.0/4275.0)*k3v-(2197.0/75240.0) &
      *k4v+(1.0/50.0)*k5v+(2.0/55.0)*k6v)/h
ry = abs((1.0/360.0)*k1y-(128.0/4275.0)*k3y-(2197.0/75240.0) &
      *k4y+(1.0/50.0)*k5y+(2.0/55.0)*k6y)/h
r = max(rv,ry)

if (r.le.tol) then
  xi = xi + h
  hacum = hacum + h
  if (hacum.ge.hmax) then
    hacum = 0.0
    i = i+1
    write(*,*) i
    vetorxi(i)=xi
    vetorv(i)=v
    vetory(i)=y
  ! y=0 em xi=R:
    if (y.le.1e-4) then
      flag=0
    endif
  end if
end if
imax = i

```

```

delta = 0.84*sqrt(sqrt(tol/r))

if (delta.le.0.1) then
h = 0.1*h
else if (delta.ge.4.0) then
h = 4.0*h
else
h = delta*h
end if

if (h.gt.hmax) then
h = hmax
end if

if (xi.ge.ximax) then
flag = 0
else if (xi+h.gt.ximax) then
h = ximax - xi
else if (h.lt.hmin) then
flag=0
end if

end do

a=sqrt((4.0*acos(-1.0d0)*G)*(1.0/(n+1.0))&
*((c**2/K)**n)*(sigma**(n-1)))
M=sqrt(1.0/(4.0*acos(-1.0d0))*((n+1.0)*c**2/G)**37
*(K/c**2)**n)*sigma**((3.0-n)/2.0)*vetorv(imax)
mu=sigma**((3.0-n)/2.0)*vetorv(imax)
write(1,*) sigma, vetorxi(imax), &
vetorv(imax), vetory(imax), Mtil

end do
close(1)
end program TolmanOppenheimerVolkoffByRungeKuttaFehlberg

```


APÊNDICE C – Validação do programa para estrela politrópica relativística

```

! SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE Tolman-Oppenheimer-Volkoff
! PELO MÉTODO DE RungeKuttaFehlberg
! AUTORES: TIAGO CARVALHO MARTINS e FABRÍCIO MACÊDO BARROS

program TolmanOppenheimerVolkoffByRungeKuttaFehlberg
implicit none
real, parameter :: n = 1.5
double precision, parameter :: G = (20.0/3.0)*1e-11
double precision, parameter :: c = 3e8
double precision, parameter :: K = 5.3802e3
double precision :: rho_c
double precision sigma
double precision, parameter :: rho_c1=1e16, rho_c2=1e20
integer, parameter :: nrho_c=200
double precision v
double precision y
double precision, parameter :: ximax = 200.0
double precision, parameter :: hmax = 1e-5
integer, parameter :: nmax = int(ximax/hmax)
double precision, parameter :: hmin = 1e-15
double precision, parameter :: tol = 1e-6
integer imax
double precision xi
double precision h
double precision auxv, auxy
double precision k1v, k1y, k2v, k2y, k3v, k3y
double precision k4v, k4y, k5v, k5y, k6v, k6y
double precision dv, dy
double precision, dimension(nmax):: vetorxi, vetorv, vetory
double precision rv, ry, delta, r, hacum
integer i, j
double precision A, M
logical:: flag, flagIsRelativistico

```

```

flagIsRelativistico=.false.

if (flagIsRelativistico) then
  open(1,file="tov.txt" )
else
  open(1,file="newton.txt" )
end if

do j=nrho_c,1,-1

rho_c = rho_c1 + (rho_c2-rho_c1)&
  *(dfloat(j-1)/dfloat(nrho_c-1))**n
if (flagIsRelativistico) then
sigma = K*rho_c**(1.0/n)/c**2
else
sigma=0.0
end if

h = hmax
i=0
xi=1e-40
flag = .true.
v = 0.0
y = 1.0
imax = 0
hacum = 0.0

do while (flag)
!-----
! Calcular k1v e k1y
!-----
auxv = v
auxy = y
dv = (xi**2*auxy**n)
dy = ((-auxv- sigma*xi**3*auxy**(n+1))&
  *(1+sigma*auxy)/(xi**2-2*sigma*(n+1)*auxv*xi))
k1v = h * dv
k1y = h * dy

```

```

!-----
! Calcular k2v e k2y
!-----
auxv = v + k1v/4.0
auxy = y + k1y/4.0
k2v = h * (xi**2*auxy**n)
k2y = h * ((-auxv- sigma*xi**3*auxy**(n+1))&
            *(1+sigma*auxy)/(xi**2-2*sigma*(n+1)*auxv*xi))

!-----
! Calcular k3v e k3y
!-----
auxv = v + (3.0/32.0)*k1v + (9.0/32.0)*k2v
auxy = y + (3.0/32.0)*k1y + (9.0/32.0)*k2y
k3v = h * (xi**2*auxy**n)
k3y = h * ((-auxv- sigma*xi**3*auxy**(n+1))&
            *(1+sigma*auxy)/(xi**2-2*sigma*(n+1)*auxv*xi))

!-----
! Calcular k4v e k4y
!-----
auxv = v + (1932.0/2197.0)*k1v - (7200.0/2197.0)*k2v &
        + (7296.0/2197.0)*k3v
auxy = y + (1932.0/2197.0)*k1y - (7200.0/2197.0)*k2y &
        + (7296.0/2197.0)*k3y
k4v = h * (xi**2*auxy**n)
k4y = h * ((-auxv- sigma*xi**3*auxy**(n+1))&
            *(1+sigma*auxy)/(xi**2-2*sigma*(n+1)*auxv*xi))
!
!-----
! Calcular k5v e k5y
!-----
auxv = v + (439.0/216.0)*k1v - 8.0*k2v &
        + (3680.0/513.0)*k3v - (845.0/4104.0)*k4v
auxy = y + (439.0/216.0)*k1y - 8.0*k2y &
        + (3680.0/513.0)*k3y - (845.0/4104.0)*k4y
k5v = h * (xi**2*auxy**n)
k5y = h * ((-auxv- sigma*xi**3*auxy**(n+1))&
            *(1+sigma*auxy)/(xi**2-2*sigma*(n+1)*auxv*xi))

```

```

!-----
! Calcular k6v e k6y
!-----

auxv = v - (8.0/27.0)*k1v + 2.0*k2v - (3544.0/2565.0)*k3v &
      + (1859.0/4104.0)*k4v - (11.0/40.0)*k5v
auxy = y - (8.0/27.0)*k1y + 2.0*k2y - (3544.0/2565.0)*k3y &
      + (1859.0/4104.0)*k4y - (11.0/40.0)*k5y
k6v = h * (xi**2*auxy**n)
k6y = h * ((-auxv- sigma*xi**3*auxy**(n+1))&
          *(1+sigma*auxy)/(xi**2-2*sigma*(n+1)*auxv*xi))

v = v + 25.0/216.0*k1v+1408.0/2565.0*k3v+2197.0/4104.0*k4v&
      -1.0/5.0*k5v
y = y + 25.0/216.0*k1y+1408.0/2565.0*k3y+2197.0/4104.0*k4y&
      -1.0/5.0*k5y
rv = abs((1.0/360.0)*k1v-(128.0/4275.0)*k3v-(2197.0/75240.0)&
        *k4v+(1.0/50.0)*k5v+(2.0/55.0)*k6v)/h
ry = abs((1.0/360.0)*k1y-(128.0/4275.0)*k3y-(2197.0/75240.0)&
        *k4y+(1.0/50.0)*k5y+(2.0/55.0)*k6y)/h
r = max(rv,ry)

if (r.le.tol) then
xi = xi + h
hacum = hacum + h
if (hacum.ge.hmax) then
hacum = 0.0
i = i+1
write(*,*) i
vetorxi(i)=xi
vetorv(i)=v
vetory(i)=y
! y=0 em xi=R:
  if (y.le.1e-4) then
    flag=.false.
  endif
end if
end if
imax = i

delta = 0.84*sqrt(sqrt(tol/r))

```

```
if (delta.le.0.1) then
h = 0.1*h
else if (delta.ge.4.0) then
h = 4.0*h
else
h = delta*h
end if

if (h.gt.hmax) then
h = hmax
end if

if (xi.ge.ximax) then
flag = .false.
else if (xi+h.gt.ximax) then
h = ximax - xi
else if (h.lt.hmin) then
flag=.false.
end if

end do
```

```
if (flagIsRelativistico) then
a=sqrt((4.0*acos(-1.0d0)*G)/c**2*(1.0/(n+1.0))&
  *((c**2/K)**n)*(sigma**(n-1)))
M=sqrt(1.0/(4.0*acos(-1.0d0))*((n+1.0)*c**2/G)**3&
  *(K/c**2)**n)*sigma**((3.0-n)/2.0)*vetorv(imax)
else
a=sqrt((4.0*acos(-1.0d0)*G&
  *rho_c**(1.0-1.0/n))/(n+1.0)/K)
M=4.0*acos(-1.0d0)*rho_c*vetorv(imax)/a**3
end if
!   Raio em km e Massa em massas solares
write(1,*) vetorxi(imax)/a/1000.0, &
  vetorv(imax), vetory(imax), M/1.9891e30
end do

close(1)
end program TolmanOppenheimerVolkoffByRungeKuttaFehlberg
```