

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	12
CAPÍTULO 1 .....	14
1.1 SINAIS, SISTEMAS E PROCESSAMENTO.....	14
1.2 ELEMENTOS BÁSICOS DE UM SISTEMA DE PROCESSAMENTO DO .....	20
SINAL DIGITAL.....	20
CAPÍTULO 2 .....	22
2.1 VANTAGENS DO PROCESSAMENTO DE SINAL DIGITAL SOBRE O .....	22
ANALÓGICO .....	22
2.2 CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS.....	23
2.3 SINAIS MULTIDIMENSIONAIS E MULTICANAIS.....	24
CAPÍTULO 3 .....	26
3.1 SINAIS DE TEMPO DISCRETO VERSUS TEMPO CONTÍNUO .....	26
CAPÍTULO 4 .....	29
4.1 SINAIS DE VALORES CONTÍNUOS VERSUS VALORES DISCRETOS.....	29
CAPÍTULO 5 .....	30
5.1 SINAIS ALEATÓRIOS VERSUS DETERMINÍSTICOS .....	30
CAPÍTULO 6 .....	32
6.1 O CONCEITO DE FREQUÊNCIA EM SINAIS NO TEMPO CONTÍNUO .....	32
E NO TEMPO DISCRETO.....	32
6.2 SINAIS SENOIDAIS CONTÍNUO NO TEMPO.....	33
6.3 SINAIS SENOIDAIS DISCRETOS NO TEMPO .....	36
CAPÍTULO 7 .....	42
7.1 EXPONENCIAIS COMPLEXAS RELACIONADAS.....	42
HARMONICAMENTE.....	42
7.2 EXPONENCIAIS CONTÍNUAS NO TEMPO.....	42
7.3 EXPONENCIAIS DISCRETAS NO TEMPO .....	43
CAPÍTULO 8 .....	45
8.1 CONVERSÃO DO SINAL ANALOGICO PARA DIGITAL E VICE –.....	45
VERSA.....	45
CAPÍTULO 9 .....	48

9.1 TEOREMA DA AMOSTRAGEM.....	48
9.2 FUNÇÃO SINC.....	51
CONCLUSÃO.....	55
BIBLIOGRAFIA .....	57

## INTRODUÇÃO

Esta monografia relata a análise e o processamento de sinais analógicos, digitais e suas relações intrínsecas, incluindo perspectiva histórica, vantagens e desvantagens, descrição das características de canais, modelos de sistemas. Contendo os princípios que fundamenta a análise do projeto de sistemas de comunicação analógica e digital, juntamente com as técnicas introduzindo a terminologia necessária para descrever as operações importantes associadas com o processo de converter um sinal analógico para a forma digital adequada para o processamento digital, como se sabe o processamento de sinais analógicos tem algumas desvantagens numa determinada aplicação. O objeto de comunicações digitais envolve a transmissão de informação na forma digital a partir de uma fonte analógica ou digital que gera a informação a um ou mais destinos.

Na área de Física Médica a demanda por profissionais qualificados é devida, principalmente, ao avanço tecnológico crescente dos equipamentos utilizados pelo setor da saúde. Tomografia computadorizada, aplicação de luz laser no tratamento dermatológico, Medicina Nuclear no tratamento do câncer, entre outros, são exemplos de áreas que necessitam de um profissional qualificado para sua operacionalização e desenvolvimento.

Acredita-se que neste trabalho exista a tentativa de proporcionar a motivação para o processamento de sinal digital como uma alternativa ao processamento de sinal analógico. São apresentados os elementos básicos do sistema de processamento para o sinal digital e definida as operações necessárias para converter um sinal analógico em um sinal digital e vice versa, pronto para serem transmitidos. Exemplificando, especificamente aplicações para processamento de voz distante, próxima e esta deve fornecer outra interface no domínio digital para o domínio analógico. Tais interfaces denominam-se conversores ( $D/A$ ) digital para analógico e ( $A/D$ ) analógico para digital.

Foi feito um estudo bem detalhado da matemática para espectros contínuos e discretos, introduzindo sinais senoidais, exponenciais, funcionais, fasores, inferência determinística e outros. A conversão de um sinal analógico para forma digital realizada por

amostragem do sinal e quantizada por amostras resultando numa distorção que impede a reconstrução do sinal analógico original das amostras quantizadas. O controle da quantidade dessa distorção ajusta-se pela mudança na taxa de amostragem e a precisão no processo de quantização. Existem efeitos de precisão finitos que devem ser considerados no processo digital da quantização de amostras. Enquanto esses assuntos importantes são considerados em alguns aspectos nesse trabalho, a ênfase dele é feita na análise e no projeto de sistema do processamento de sinais analógicos, digitais e nas técnicas computacionais para sinais e imagens, onde é usada o software **MatLab** para executar as tarefas.

Ao desenvolver o teorema de amostragem é percebido que os efeitos da quantização são inerentes à conversão ( $A/D$ ) de um sinal. O tema da reconstrução do sinal, ou conversão  $D/A$ , foi brevemente descrito, com a reconstrução do sinal com base na escada ou método da interpolação linear. Existem numerosas aplicações práticas de processamento de sinal digital. De particular importância o teorema de amostragem, que foi introduzido por *Nyquist* (1928).

## CAPÍTULO 1

### 1.1 SINAIS, SISTEMAS E PROCESSAMENTO.

Os computadores digitais e hardware eram relativamente grandes, lentos e caros, como consequência sua utilização foi limitada nos cálculos científicos e ferramentas de softwares. Os rápidos desenvolvimentos em tecnologia de circuitos integrados nos circuitos eletrônicos estimularam o desenvolvimento de computadores digitais e hardwares menores, mais rápidos, mais baratos tornando-os poderosos. Esses circuitos digitais modernos e relativamente rápidos fizeram ser possíveis construir sistemas digitais altamente sofisticados capazes de executar tarefas e funções de processamentos de sinais digitais complexos. Portanto muitas tarefas de processamentos digitais que eram convencionalmente executados por meios analógicos são realizadas hoje por hardwares digitais mais originais e frequentemente mais confiáveis.

Não se quer dar a entender que o sinal de processamento digital é a solução adequada para todos os problemas de processamento de sinais. Para sinais analógicos com larguras de faixa extremamente grande, processado em tempo real é necessária a exigência do processamento digital. Quando os circuitos digitais estão disponíveis e têm velocidade suficiente para executar os processamentos de sinais, eles são geralmente preferíveis.

Não somente os circuitos digitais produzem sistemas baratos e mais confiáveis para processamentos de sinais, como tem outras vantagens. Em particular processamento digital e hardware permitem operações programáveis. Através de softwares, pode-se mais facilmente modificar as funções de processamentos de sinais a serem realizadas pelos hardwares. Assim, hardwares associados a softwares digitais proporcionam um grau maior de flexibilidade nos projetos de sistemas. Também, existe frequentemente uma ordem de realização maior na precisão obtida com hardwares e softwares digitais comparado com circuitos e sinais analógicos. Por todas essas razões, tem havido um crescimento explosivo na teoria e aplicações do processamento de sinal digital ao longo das últimas décadas.

O objetivo é apresentar ferramentas de análise básica, técnicas de processamento de sinais digitais e introduzir alguma terminologia necessária e descrever operações importantes associadas com o processo de converter um sinal analógico para a forma digital adequada para o processamento digital, como se sabe o processamento de sinais analógicos tem algumas desvantagens. Primeiro, a conversão de um sinal analógico

para forma digital realizada por amostragem do sinal e quantizada por amostras, resultam numa distorção que impede a reconstrução do sinal analógico original das amostras quantizadas.

O controle da quantidade dessa distorção ajusta-se pela mudança na taxa de amostragem e a precisão no processo de quantização. Segundo, existem efeitos de precisão finitos que devem ser considerados no processo digital da quantização de amostras, a ênfase dele é feita na análise e no projeto de sistema do processamento de sinais digitais e nas técnicas computacionais.

Um sinal é definido como uma quantidade física que varia no tempo e espaço, ou qualquer outra variável independente. Matematicamente, descreve-se um sinal como uma função de uma ou mais variáveis independentes. Por exemplo, as funções descrevem dois sinais, um que varia linearmente com a variável independente  $t$  (tempo) e outra que varia com o quadrado de  $t$ .

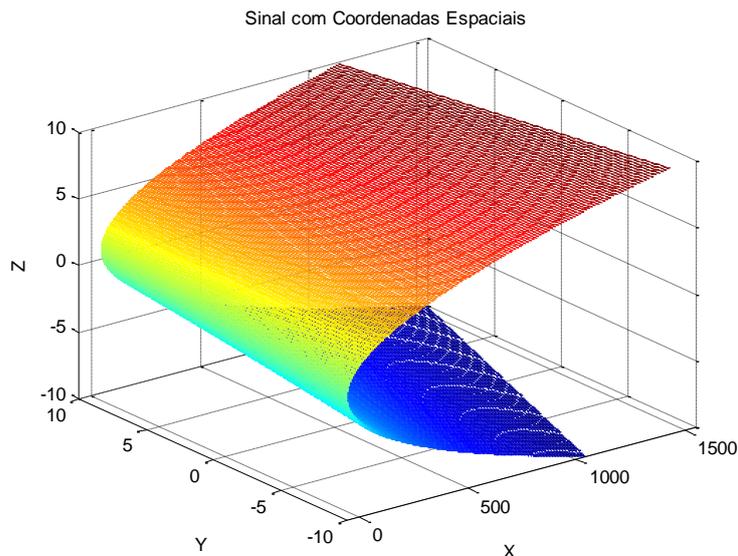
$$\begin{aligned} S_1(t) &= 3t \\ S_2(t) &= 10t^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

A função

$$Z = 5x - 2xy + 13y^2 \quad (1.2)$$

(1.2), descreve um sinal de duas variáveis independentes  $x$  e  $y$  que representam as duas coordenadas espaciais no plano (*Fig – 1.1*). Os sinais descritos por (1.1) e (1.2), pertencem a uma classe de sinais que são precisamente definidos especificando a dependência funcional da variável independente.

```
% Funções com Coordenadas Espaciais
clear all
close all
x=linspace(-10,10);
y=linspace(-10,10);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=5*X-2*X.*Y+13*Y.^2;
contour3(Z,X,Y,350)
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
title('Sinal com Coordenadas Espaciais')
```



**Figura 1.1 – Sinal com Dependência Funcional.**

No entanto, existem casos onde tais relações funcionais são desconhecidas ou altamente complicadas para serem de qualquer uso prático. Assim como, um sinal de voz (*Fig – 1.2 e 1.3*) não pode ser descrito por expressões funcionais. Em geral, um segmento de voz pode ser representado para um alto grau de precisão, como uma soma senoidal de amplitudes e frequências diferentes, isto é:

$$\sum_{i=1}^N A_i(t) \text{sen}[2\pi f_i(t)t + \theta_i(t)] \quad (1.3)$$

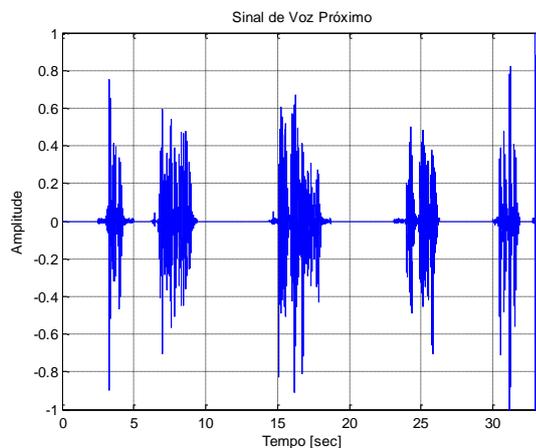
Onde  $\{A_i(t)\}$ ,  $\{f_i(t)\}$  e  $\{\theta_i(t)\}$  são os conjuntos de (possíveis variáveis no tempo) amplitudes, frequências e fases, respectivamente. De fato, uma maneira de interpretar o conteúdo da informação ou mensagem transmitida por qualquer segmento no curto espaço de tempo do sinal de voz é mensurar as amplitudes, frequências e fases contidas nesse curto segmento de tempo do sinal.

```
% Sinal de Voz Próximo
clear all
close all
load nearspeech
n = 1:length(v);
t = n/fs;
plot(t,v);
axis([0 33.5 -1 1]);
xlabel('Tempo [sec]');
ylabel('Amplitude');
title('Sinal de Voz Próximo');
```

```

set(gcf, 'Color', [1 1 1])
p8 = audioplayer(v,fs);
playblocking(p8);
grid

```

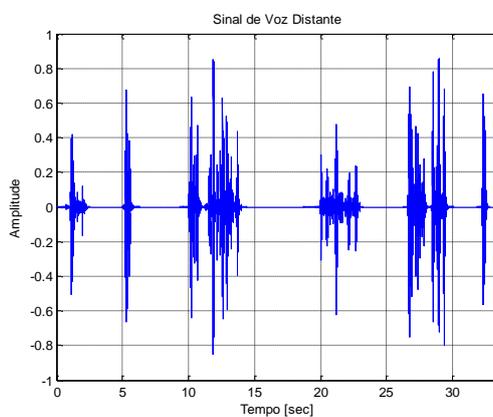


**Figura 1.2 - Sinal de Voz Próximo.**

```

% Sinal de Voz Distante
clear all
close all
M = 401;
fs = 800;
[B,A] = cheby2(4,20,[0.1 0.7]);
Hd = dfilt.df2t([zeros(1,6) B],A);
H = filter(Hd,log(0.99*rand(1,M)+0.01).* ...
    sign(randn(1,M)).*exp(-0.002*(1:M)));
H = H/norm(H)*4; % Resposta Impulso
load nearspeech
n = 1:length(v);
t = n/fs;
load farspeech
x = x(1:length(x));
dhat = filter(H,1,x);
plot(t,dhat);
axis([0 33.5 -1 1]);
xlabel('Tempo [sec]');
ylabel('Amplitude');
title('Sinal de Voz Distante');
set(gcf, 'Color', [1 1 1])
p8 = audioplayer(dhat,fs);
playblocking(p8);
grid

```



**Figura 1.3 - Sinal de Voz Distante.**

Na Física Médica que é um ramo multidisciplinar, pois atua nas áreas de cardiologia onde são analisados o eletrocardiograma (*ECG*), tais sinais fornecem informações sobre a condição do coração do paciente a um médico. Da mesma forma, um sinal de eletroencefalograma (*EEG*) fornece informações sobre a atividade do cérebro. Nos campos radiológicos, nucleares, biomagnetismos, imagens e sinais biomédicas, atuam também na calibração de equipamentos, monitoração de controle de radiação, dosimetria, etc... Por isso, esses profissionais devem ter o conhecimento dos conteúdos desta monografia.

Sinais de voz, eletrocardiograma e eletroencefalograma são exemplos de sinais portadores de informação que são funções de uma variável independente única, a saber, o tempo. Um exemplo de um sinal que são funções de duas variáveis independentes é um sinal de imagem. As variáveis independentes neste caso são as coordenadas espaciais. Esses são apenas alguns exemplos do número incontável de sinais naturais encontradas na prática.

Associado com sinais naturais estão os meios pelos quais tais sinais são gerados. Por exemplo, sinais de voz são gerados pela força do ar através das cordas vocais. Imagens são obtidas expondo-se um filme fotográfico a uma cena ou a um objeto. Logo, as gerações dos sinais estão normalmente associadas com o sistema que responde aos estímulos da força. Em um sinal de voz, o sistema consiste das cordas vocais e da região vocal, também chamada de cavidade vocal. O estímulo em combinação com o sistema é chamado uma fonte de sinal. Assim, temos fontes de vozes, fontes de imagens (*Fig – 1.4*) e vários outros tipos de fontes de sinais.

Um sistema pode também ser definido como um dispositivo físico que executa uma operação sobre um sinal. Por exemplo, um filtro utilizado para reduzir o ruído e a interferência que corrompem um procedimento do sinal de informação desejado chama-se sistema. Nesse caso, o filtro executa algumas operações sobre o sinal, que tem o efeito de reduzir e filtrar o ruído que é a interferência do procedimento do sinal na informação desejada.

Quando passa um sinal através de um sistema, como na filtragem, diz-se que o sinal é processado. Nesse caso, o processamento de sinal envolve filtro, ruído e interferência do sinal desejado. Em geral, o sistema é caracterizado pelo tipo de operação sobre o sinal. Por exemplo, se a operação é linear, o sistema é chamado linear. Se a

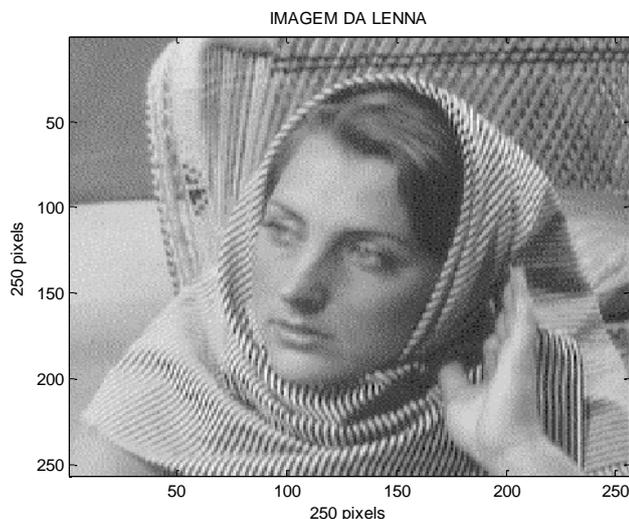
operação sobre o sinal é não linear o sistema é dito ser não linear e assim por diante. Tais operações são referidas como processamento de sinais.

É conveniente incluir não somente a definição de um sistema físico, mais também realizações de operações softwares sobre o sinal. No processamento de sinais digitais sobre um computador digital, as operações realizadas sobre os sinais consistem de um número de operações matemáticas, conforme especificado por programas de softwares. Nesse caso, o programa representa uma implementação do sistema em softwares. Assim, o sistema que é realizado sobre um computador digital por meio de uma sequência de operações matemáticas; ou seja, têm-se o sistema de processamento do sinal digital realizado em softwares. Por exemplo, um computador digital pode ser programado para executar a filtragem digital. Alternativamente, o processamento digital sobre o sinal pode ser realizado por hardwares digitais (circuitos lógicos), configurado para executar as operações específicas desejadas. Em tais realizações, possui-se um dispositivo físico que executa as operações especificadas. Num sentido mais amplo um sistema digital pode ser considerado como uma combinação de hardwares e softwares digitais, cada um executando o seu próprio conjunto de operações especificadas.

O processamento de sinais por meios digitais, ou em softwares ou em hardwares, será considerado um problema de converter um sinal analógico em um sinal digital para processamento. Uma vez que muitos dos sinais encontrados na prática são analógicos. Inicialmente, tratar-se-á o problema do sinal digital, as operações executadas por tais sistemas podem geralmente ser especificada matematicamente. O método ou conjunto de regras para o implemento do sistema por um programa que executa as operações matemáticas correspondentes é chamado de algoritmo. Usualmente, existem muitos algoritmos através dos quais os sistemas podem ser executados, quer em softwares ou em hardwares, para executar as operações e os cálculos desejados. Na prática, elaboram-se algoritmos que são computacionalmente eficiente, rápido e de fácil praticidade. Assim, será feito alguns algoritmos para representar gráficos analógicos e digitais. Como feito nos sinais de vozes e de imagens.

```
% Imagem da Lena
clear all % Limpa Área de Trabalho
close all % Fecha Todas as Janelas de Figuras
load woman; % Carregar a Imagem Original
image(X)
title('IMAGEM DA LENNA')
colormap(map)
```

```
x = X(100:200,100:200);
xlabel('250 pixels')
ylabel('250 pixels')
```



**Figura 1.4 - Sinal de Imagem.**

Lenna ou Lena é o nome dado a uma imagem de teste padrão amplamente utilizado no campo de processamento de imagem desde 1973. É uma representação padronizada e importante para comparações de algoritmos. Lena é um retrato de Lena Söderberg, tirada pelo fotógrafo *Dwight Hooker*, colhido a partir da página central da edição de novembro de 1972, *Playboy*, (**PLAYBOY ARCHIVE** - Lenna's centerfold, pp 138-140, 1972).

## 1.2 ELEMENTOS BÁSICOS DE UM SISTEMA DE PROCESSAMENTO DO

### SINAL DIGITAL.

A maioria dos sinais encontrados na física e na engenharia são de natureza analógica. Isto é, sinais de funções de variáveis contínuas, tais como tempo, ou espaço e geralmente, tomam valores em uma faixa contínua. Tais sinais podem ser processados diretamente por sistemas analógicos apropriados tais como filtros, ou analisadores de frequência, ou multiplicadores de frequência para o propósito de mudança nas suas características, ou extração de alguma informação desejada. Em tais casos, os sinais foram processados diretamente da sua forma analógica, como ilustrado na *Fig – 1.5*. Ambos os sinais de entrada e saída estão na forma analógica.



Figura 1.5 - Processamento do Sinal Analógico.

Processamento de sinal digital fornece um método alternativo para o processo do sinal analógico, como ilustrado na *Fig – 1.6*. Para executar o processamento digitalmente há uma necessidade de uma interface entre o sinal analógico e o processador digital. Essa interface é chamada de conversor ( $A/D$ ) analógico para digital. A saída do conversor ( $A/D$ ) é um sinal digital adequado como entrada para o processador digital.

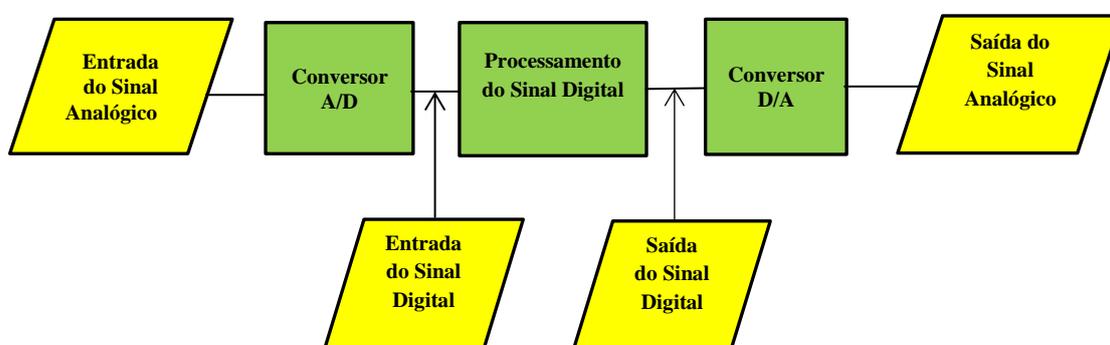


Figura 1.6 - Diagrama de bloco de um sistema de processamento de sinal digital.

O processador do sinal digital pode ser um computador digital amplamente programável ou um pequeno microprocessador programado para executar um conjunto especificado de operações sobre o sinal de entrada. Máquinas programáveis fornece a flexibilidade para mudanças de operações do processamento do sinal através de mudanças no software, enquanto máquinas físicas são difíceis para reconfigurar. Conseqüentemente, processadores de sinais programáveis são comumente muito mais usados. Por outro lado, quando operações processando sinais são bem definidas, uma implementação de hardware das operações podem ser otimizado, resultando em um processador de sinal mais barato e em contra partida sua programação e mais rápida. Em aplicações onde a saída digital do processador de sinal digital e dada para o usuário em forma analógica, tais como a comunicação de voz, deve fornecer outra interface do domínio digital para o domínio analógico. Tais interfaces denomina-se um conversor ( $D/A$ ) digital para analógico. Assim, o sinal é fornecido para o usuário, em forma analógica, como ilustrado no diagrama de

blocos da *Fig – 1.6*. Contudo, existem outras aplicações práticas envolvendo análise de sinal, onde a informação desejada é transportada em forma digital e nenhum conversor ( $D/A$ ) é necessário. Por exemplo, no processamento digital de sinais de radar, as informações extraídas do radar, tal como a posição da aeronave e suas velocidades, pode simplesmente ser impressa sobre o papel. Não há necessidade de um conversor ( $D/A$ ) nesse caso.

## CAPÍTULO 2

### 2.1 VANTAGENS DO PROCESSAMENTO DE SINAL DIGITAL SOBRE O

#### ANALÓGICO

Existem muitas razões para os quais o processamento digital do sinal ser preferível para acioná-lo diretamente do domínio analógico, como mencionado a priori. Primeiro, o sistema digital programável permite flexibilidade em reconfigurar as operações de processamento de sinais digitais simplesmente alterando o programa. A reconfiguração de um sistema analógico geralmente implica em um projeto novo de hardware seguido de testes e verificações para ver se ele funciona corretamente.

Considerações precisas também desempenham um papel importante na determinação da forma do processador do sinal. Tolerâncias em componentes do circuito analógicos tornam-se extremamente dificultoso para o projetista do sistema controlar a precisão do sistema processando o sinal analógico. Por outro lado, um sistema digital proporciona um controle muito melhor de requisitos na precisão. Tais requisitos, por sua vez, resultam na especificação precisa do conversor  $A/D$  e do processador de sinal digital, em termos de algoritmos, pontos flutuantes por aritmética de pontos fixos e fatores semelhantes.

Os sinais digitais são facilmente armazenados em meios magnéticos (fita ou disco), sem deterioração ou perda de fidelidade do sinal, além disso, introduzido na conversão  $A/D$ . Como consequência, os sinais tornam-se transportáveis e podem ser processados *off-line* num laboratório remoto. O método de processamento de sinal digital também permite implemento de algoritmos mais sofisticados de processamento do sinal. É

geralmente muito difícil executar operações matemáticas precisas nos sinais na forma analógica, mas essas mesmas operações podem ser praticadas rotineiramente em um computador digital usando softwares.

Em alguns casos um programa digital do sistema de processamento de sinal é mais barato do que a sua contraparte analógica. O custo baixo pode ser devido ao fato que o hardware digital é mais barato, ou talvez seja um resultado da flexibilidade fornecida por modificações pela prática digital.

Como consequência dessas vantagens, o processamento de sinal digital tem sido aplicado em sistemas utilitários que abrangem uma grande faixa de disciplinas. Por exemplo, a aplicação das técnicas de processamento de sinais digitais no processamento de voz, a transmissão de sinais nos canais telefônicos, processamento e transmissão de imagens, em sismologia, em geofísica, na exploração de óleo, na detecção de explosões nucleares, no processamento de sinais recebidos a partir de fora do espaço e em uma vasta variedade de outras aplicações. Alguns desses aplicativos a posteriori serão citados.

Como já indicado, a execução digital tem suas limitações. Uma limitação prática é a velocidade das operações dos conversores  $A/D$  e dos processadores de sinais digitais. Vê-se que sinais com larguras de faixas extremamente larga requerem um taxa de amostragem de conversores  $A/D$  e processadores de sinais digitais rápidos. Portanto existem sinais analógicos com grandes larguras de banda para os quais o processamento digital pertence à abordagem do estado da arte do hardware digital.

## 2.2 CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS

Os métodos usados para o processamento de um sinal ou análise de resposta de um sistema de sinal dependem fortemente das características dos atributos do sinal especificado. Existem técnicas que somente aplicam as famílias específicas de sinais. Consequentemente, qualquer investigação em um processamento de sinal deve iniciar com uma classificação de sinais envolvidos na aplicação específica.

## 2.3 SINAIS MULTIDIMENSIONAIS E MULTICANAIS

Como explicado um sinal é descrita por uma função de uma ou mais variáveis independentes. O valor da função pode ser uma grandeza escalar de valor real, ou uma quantidade de valor complexo, ou talvez um vetor. Por exemplo, o sinal,

$$S_1(t) = A \operatorname{sen} 3\pi t \quad (2.1)$$

é um valor real. No entanto, o sinal,

$$S_2(t) = Ae^{j3\pi t} = A \cos 3\pi t + j A \operatorname{sen} 3\pi t \quad (2.2)$$

é um valor complexo. Em algumas aplicações, sinais são gerados por fontes múltiplas ou sensores múltiplos. Tais sinais, por sua vez, podem ser representados em forma vetorial. Como as três componentes de um sinal vetorial que representa a aceleração devido a um terremoto. Essa aceleração é o resultado de três tipos básicos de ondas elásticas. As ondas primárias ( $P$ ) e as ondas secundárias ( $S$ ) que se propagam dentro da terra e são longitudinais e transversais, respectivamente. O terceiro tipo de onda é a elástica chamada de onda superficial. Porque, propaga-se perto da superfície terrestre. Assim,  $S_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , denota o sinal elétrico do  $k$  – ésimo sensor como função do tempo, o conjunto de  $p = 3$  sinais podem ser representado por um vector  $\mathbf{S}_3(t)$ , onde:

$$\mathbf{S}_3(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Agora nossa atenção é para a variável independente  $s$ . Se o sinal é uma função de uma variável independente única, o sinal é chamado de um sinal unidimensional. Por outro lado, um sinal é chamado de dimensão  $-M$  se seu valor é uma função de  $M$  variáveis independentes.

A imagem mostrada na *Fig – 1.4* é um exemplo de um sinal de duas dimensões espaciais. Desde que a intensidade ou brilho  $I(x, y)$  em cada ponto é uma função de duas variáveis independente. Por outro lado, uma imagem de um televisor preto e branco pode ser representada como  $I(x, y, t)$  uma vez que o brilho é uma função do

tempo. Portanto a imagem de *TV* pode ser tratada como um sinal tridimensional. Em contraste, a imagem de *TV* a cor pode ser descrito por três funções de intensidade da forma  $I_r(x, y, t)$ ,  $I_g(x, y, t)$ , e  $I_b(x, y, t)$ , correspondendo ao brilho das três principais cores (vermelho, verde, azul) denominada técnica *RGB*, como funções do tempo. Portanto a imagem da *TV* a cor é um sinal tridimensional com três canais os quais podem ser representada pelo vetor.

$$\mathbf{I}(x, y, t) = \begin{bmatrix} I_r(x, y, t) \\ I_g(x, y, t) \\ I_b(x, y, t) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Esta monografia trata principalmente de um único canal, com uma dimensão real ou sinais de valores complexos e refere a eles simplesmente como sinais. Em termos matemáticos esses sinais são descritos por uma função de uma variável única. Embora a variável independente não necessariamente seja o tempo, é comum na prática usá-la como variável independente. Em muitos casos, as operações de processamento do sinal e de algoritmos desenvolvidos nesse texto para sinais de uma dimensão e em um único canal pode ser estendido para sinais multidimensionais e multicanais.

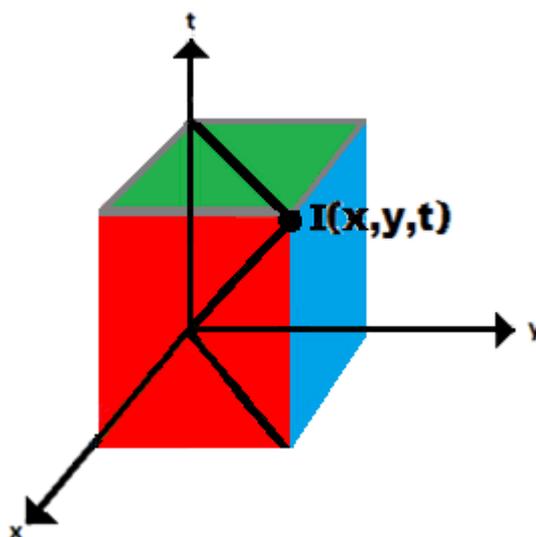


Figura 2.1 - Sinal Tridimensional Multicanal.

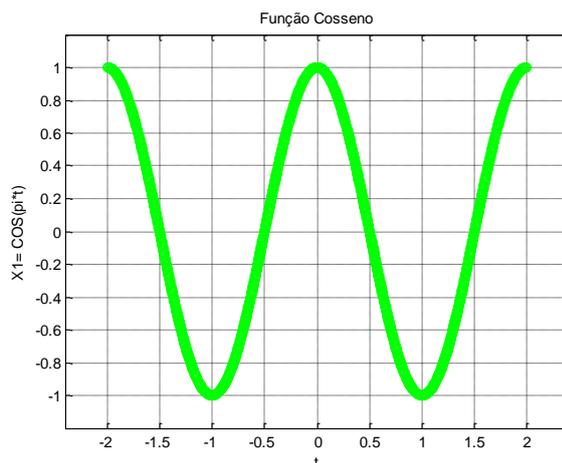
## CAPÍTULO 3

## 3.1 SINAIS DE TEMPO DISCRETO VERSUS TEMPO CONTÍNUO

Os sinais podem ser classificados em quatro categorias diferentes, dependendo das características das variáveis do tempo (independente) e os valores que elas tomam. Sinais no tempo contínuo ou sinais analógicos são definidos para cada valor do tempo, eles assumem valores em intervalos contínuos  $(a, b)$ , onde  $a$  pode ser  $-\infty$  e  $b$   $+\infty$ . Matematicamente, esses sinais podem ser descritos por funções de uma variável contínua. A forma de onda da voz na *Fig – 1.2* e *1.3* e os sinais:

$$X_1(t) = \cos \pi t \quad (3.1)$$

```
% Função cosseno
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
t=-2:0.001:2;
X1=cos(pi*t);
plot(t,X1,'og')
axis([-2.4 2.4 -1.2 1.2])
xlabel( ' t ' ); ylabel( ' X1= COS(pi*t) ' ); % Rótulos dos Eixos
title( 'Função Cosseno' )
grid
hold on
```



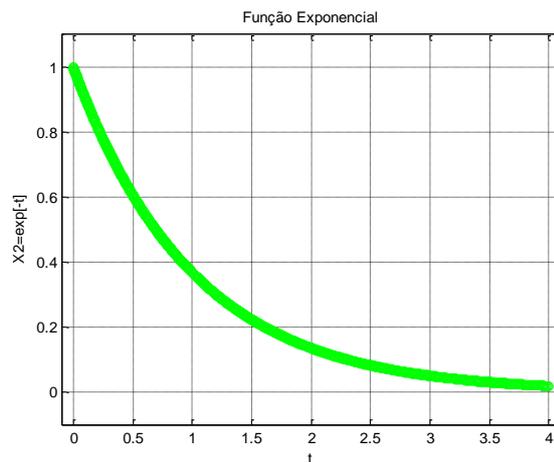
**Figura 3.1 - Função Cosseno.**

$$X_2(t) = e^{-|t|} \quad (3.2)$$

```

% Função exponencial
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
t=0:0.001:4;
X2=exp(-t);
plot(t,X2,'og')
axis([-0.1 4.1 -0.1 1.1])
xlabel( ' t ' ); ylabel( ' X2=exp[-t]' ); % Rótulos dos Eixos
title( 'Função Exponencial' )
grid
hold on

```



**Figura 3.2 - Função Exponencial.**

para  $-\infty < t < +\infty$ , são exemplos de sinais analógicos.

Sinais discretos no tempo são definidos apenas para certos valores específicos do tempo. Esses instantes no tempo não precisam ser equidistantes, mas na prática eles são normalmente tomados em intervalos de espaços iguais por conveniência computacional e tratamento matemático. O sinal;  $x(t_n) = e^{-|t_n|}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  fornece um exemplo de um sinal discreto no tempo. Usa-se o índice  $n$  dos instantes discretos no tempo como a variável independente, o valor do sinal torna-se uma função de uma variável inteira (i.e, uma sequência de números). Assim, um sinal discreto no tempo pode ser representado matematicamente por uma sequência de reais ou números complexos. Para enfatizar a natureza do sinal discreto no tempo denota-se esse sinal como  $x[n]$  em vez de  $x(t)$ . Se o instante de tempo  $t_n$  são igualmente espaçados (i.e,  $t_n = nT$ ), a notação  $x[nT]$ , também é usada. Por exemplo, a sequência:

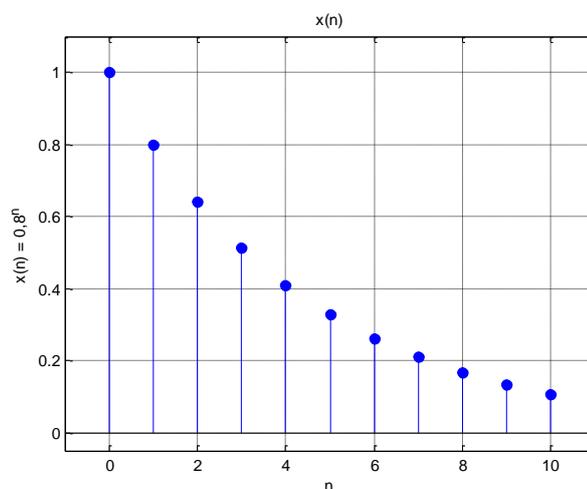
$$x(n) = \begin{cases} 0,8^n & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.3)$$

é um sinal discreto no tempo, que é representado graficamente na *Fig – 3.3*. Nas aplicações de sinais discretos no tempo podem surgir dois caminhos: (**PROAKIS**, p. 9 – 10).

1. Selecionando valores de um sinal analógico em instantes discreto do tempo. Este processo é chamado de amostragem é discutido em mais detalhe no Capítulo 8, todos os instrumentos que fazem medidas em um intervalo regular de tempo fornece sinais discretos no tempo. Por exemplo, o sinal  $x(n)$  na *Fig.–3.3* pode ser obtido por amostragem do sinal analógico  $x(t) = 0,8^t$ ,  $t \geq 0$ , e  $x(t) = 0$ ,  $t < 0$  uma vez a cada segundo.

2. Acumulando uma variável ao longo de um período de tempo. Por exemplo, contando o número de carros usando uma determinada rua a cada hora, ou registrando o valor do ouro a cada dia, resulta em sinais discretos no tempo.

```
% Gráfico x=0.8.^n no Tempo Discreto
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
n= 0 : 1 : 10; % Pontos amostrados de 0 to 10 em passos de 1
stem(n,0.8.^n,'filled');% Criar Gráfico Discretos Segundo a Equação Dada
axis ([-1 11 -0.05 1.1])
xlabel('n'); ylabel('x(n) = 0,8^n');
title('x(n)'); % Titulo do Gráfico
grid
```



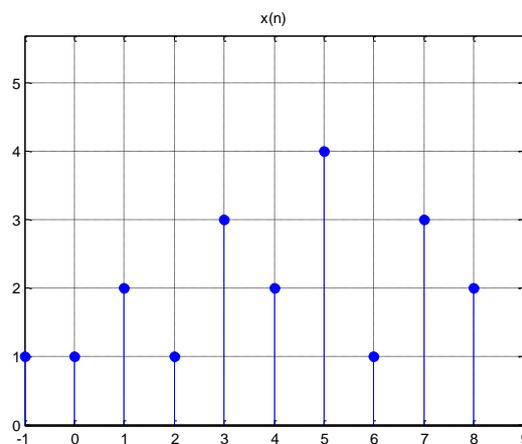
**Figura 3.3 - Representação gráfica do sinal de tempo discreto  $x(n) = 0.8^n$ ,  $\forall n > 0$  e  $x(n) = 0$  para  $n < 0$ .**

## CAPÍTULO 4

### 4.1 SINAIS DE VALORES CONTÍNUOS VERSUS VALORES DISCRETOS

Os valores de um sinal podem ser contínuos ou discretos. Se um sinal assume todos os valores possíveis em uma faixa finita ou infinita é dito ser um sinal de valor contínuo. Alternativamente, se o sinal tomar valores de um conjunto finito de possíveis valores ele é dito ser um sinal de valores discretos. Normalmente, esses valores são equidistantes e, portanto podem ser expresso como um múltiplo inteiro da distância entre dois valores sucessivos. Um sinal discreto no tempo tendo um conjunto de valores discretos é chamado um sinal digital. A *Fig – 4.1* mostra um sinal digital que toma um dos quatro valores possíveis.

```
% Gráfico no Tempo Discreto
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
n=-1;x=1;n0=0;x0=1;n1=1;x1=2;
n2=2;x2=1;n3=3;x3=3;n4=4;x4=2;
n5=5;x5=4;n6=6;x6=1;n7=7;x7=3;
n8=8;x8=2;
N=[n n0 n1 n2 n3 n4 n5 n6 n7 n8]; % Concatena os ptos
X=[x x0 x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8]; % Concatena os ptos
stem(N,X,'ob','filled')
axis ([-1 9 -0.001 5.7])
title( 'x(n)' )
grid
hold on
```



**Figura 4.1 - Sinal digital com quatro valores de amplitude diferentes.**

Para um sinal ser processado digitalmente, ele deve estar discreto no tempo e os seus valores devem ser discretos. Se o sinal a ser processado está na forma analógica, que é convertido para um sinal digital por amostragem do sinal analógico em instantes discretos no tempo, obtendo um sinal discreto no tempo e então quantizando os seus valores para um conjunto de valores discretos, conforme descrito posteriormente. O processo de converter um sinal de valor contínuo em um sinal de valor discreto é chamado de quantização e é basicamente um processo de aproximação. Ele pode ser realizado simplesmente por arredondamento ou truncamento. Se os valores de sinais permitidos no sinal digital são valores inteiros admissíveis de 0 até 15, por exemplo o sinal de valor contínuo é quantizados para esses valores inteiros. Assim, o valor do sinal de 8,58 será aproximado para 8 se o processo de quantização é executado por truncamento ou para 9 se o processo de quantização é realizado por arredondamento para o inteiro mais próximo. Uma explanação do processo de conversão analógico para digital é dada a posteriori.

## CAPÍTULO 5

### 5.1 SINAIS ALEATÓRIOS VERSUS DETERMINÍSTICOS

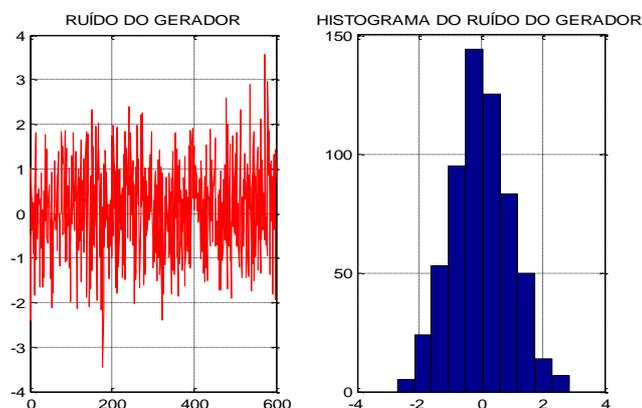
O processamento e a análise matemática de sinais requer uma descrição matemática disponível para o próprio sinal. Essa descrição frequentemente é referida como o modelo de sinal, leva a outra importante classificação de sinais. Qualquer sinal que pode ser descrito unicamente por uma expressão matemática explícita, ou uma tabela de dados, ou uma regra bem definida é chamada de determinística. Esse termo é usado para enfatizar que todo valor dos fatos passado, presente, é futuros do sinal são conhecidos precisamente, sem qualquer incerteza.

Em muitas aplicações práticas, contudo, existem sinais que também não podem ser descrito razoavelmente por qualquer grau de precisão através de fórmulas matemáticas explícitas, ou tais descrição são também complicadas para qualquer uso prático. A falta de tais relações implica que os sinais evoluem no tempo de uma maneira imprevisível. Refere-se a esses sinais como aleatórios. A saída de um gerador com ruído, o sinal sísmico e o sinal de voz na *Fig – 1.2 e 1.3* são exemplos de sinais aleatórios.

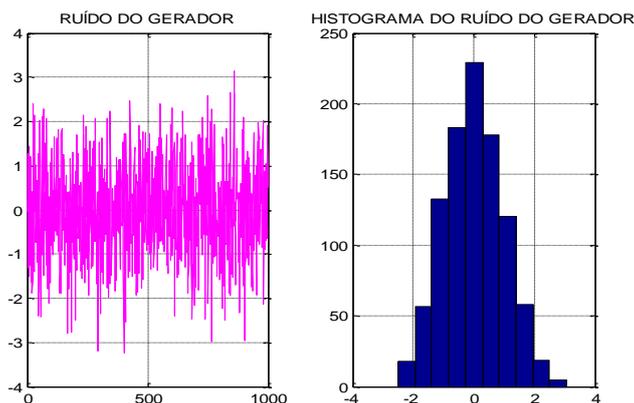
Os programas que geram as *Fig – 5.1* e *5.2* mostram dois sinais obtidos a partir do mesmo gerador com ruído e seus histogramas associados. Embora os dois sinais não pareçam visualmente um com o outro, seus histogramas mostram algumas semelhanças. Esta motivação proporciona à análise e a descrição do sinal aleatório usando técnicas estatísticas em vez de fórmulas explícitas.

```
% 1° HISTOGRAMA DO RUÍDO DE UM GERADOR
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
z= randn(600,1);
subplot(1,2,1);
plot(z, 'r');
title('RUÍDO DO GERADOR')
grid
y=randn(600,1);
subplot(1,2,2);
hist(y);
title('HISTOGRAMA DO RUÍDO DO GERADOR');
grid
```

```
% 2° HISTOGRAMA DO RUÍDO DE UM GERADOR
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
z= randn(1000,1);
subplot(1,2,1);
plot(z, 'm');
title('RUÍDO DO GERADOR')
grid
y=randn(1000,1);
subplot(1,2,2);
hist(y);
title('HISTOGRAMA DO RUÍDO DO GERADOR');
grid
```



**Figura 5.1 - Primeiro Sinal Aleatório do Gerador e seu Histograma.**



**Figura 5.2 – Segundo Sinal Aleatório do Gerador e seu Histograma.**

A estrutura matemática para a análise teórica dos sinais aleatórios é dada pela teoria da probabilidade e processos estocásticos. Necessita de elementos básicos para essa abordagem, adaptada às necessidades do trabalho envolvido.

É necessário enfatizar nesse ponto que a classificação de um sinal determinístico ou aleatório no mundo real não é sempre clara. Algumas vezes as abordagens levam a resultados significativos que fornecem mais detalhes sobre o comportamento do sinal internamente, outras vezes, a classificação errada pode levar a resultados vagos, visto que algumas ferramentas matemáticas devem ser aplicadas somente a sinais determinísticos enquanto outros podem ser aplicados somente para sinais aleatórios. Isso ficará mais claro quando se examinar as ferramentas matemáticas específicas.

## CAPÍTULO 6

### 6.1 O CONCEITO DE FREQUÊNCIA EM SINAIS NO TEMPO CONTÍNUO

#### E NO TEMPO DISCRETO

O conceito de frequência é familiar aos estudantes de física e de engenharia. Esse conceito é básico, por exemplo, o projeto de um receptor de rádio, de um sistema de alta fidelidade, ou um filtro espectral para fotografia a cores. Da física, sabe-se que frequência está relacionada intimamente com um tipo específico de movimento periódico chamado oscilação harmônica, a qual é descrita por funções senoidais. O conceito de

frequência está diretamente relacionado com o conceito de tempo. Na verdade, tem a dimensão do inverso do tempo. Assim, espera-se que a natureza do tempo (contínuo ou discreto) afete conseqüentemente a natureza da frequência.

## 6.2 SINAIS SENOIDAIS CONTÍNUO NO TEMPO

A oscilação harmônica simples é matematicamente descrita pelo seguinte sinal senoidal no tempo contínuo, mostrado na *Fig – 6.1*.

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta), -\infty < t < \infty \quad (6.1)$$

O índice *a* usado em  $x(t)$  representa um sinal analógico. Esse sinal é completamente caracterizado por três parâmetros: *A* é a amplitude da senóide,  $\Omega$  é a frequência em radianos por segundo (*rad/s*) e  $\theta$  é a fase em radianos. Em vez de  $\Omega$  usa-se a frequência *F* em ciclos por segundo ou hertz (*Hz*), onde:

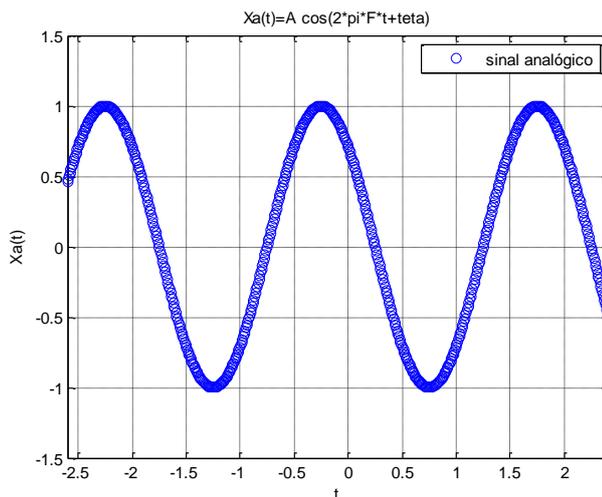
$$\Omega = 2\pi F \quad (6.2)$$

Em termos de *F*, (6.1) pode ser escrita como:

$$x_a(t) = A \cos(2\pi Ft + \theta), -\infty < t < \infty \quad (6.3)$$

Ambas as formas são usadas, (6.1) e (6.3), em que representa os sinais senoidais.

```
% SINAL ANALÓGICO
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
F=0.5; %Hz
A=1; % Amplitude
t=[-pi:0.0081:1.055*pi]; % Tempo em seg
teta=pi/4; % Defasagem
Xa = A*cos(2*pi*F*t+teta); % Sinal da moduladora
plot(t,Xa,'ob')
axis ([-2.6 2.4 -1.5 1.5])
legend('sinal analógico')
xlabel('t'), ylabel('Xa(t)');
title('Xa(t)=A cos(2*pi*F*t+teta)')
hold on
grid
```



**Figura 6.1 - Sinal Analógico Senoidal.**

O sinal senoidal analógico em (6.3) é caracterizado pelas seguintes propriedades: (PROAKIS, p. 15).

**I** ▪ Para cada valor fixo da frequência  $F$ ,  $x_a(t)$  é periódico. De fato, pode-se facilmente mostrar, usando trigonometria elementar.

$$x_a(t + T_p) = x_a(t) \quad (6.4)$$

Onde:  $T_p = 1/F$  é o período fundamental do sinal senoidal.

**II** ▪ Sinais senoidais contínuo no tempo com frequências distintas são por si só diferentes.

**III** ▪ Aumentando a frequência  $F$  resulta em um aumento na taxa de oscilação do sinal, no sentido que mais períodos são incluídos em um dado intervalo de tempo.

Observa-se que para  $F \rightarrow 0$ , o valor  $T_p \rightarrow \infty$  e está consistente com a relação fundamental  $F = 1/T_p$ . Devido à continuidade da variável tempo  $t$ , assim aumenta-se a frequência  $F$ , sem limite, com um correspondente aumento na taxa de oscilação.

As relações descritas para sinais senoidais carregam uma classe de sinais exponenciais complexas.

$$x(t) = Ae^{j(\Omega t + \theta)} \quad (6.5)$$

Isso pode facilmente ser visto expressando esses sinais em termos senoidais usando a identidade de Euler.

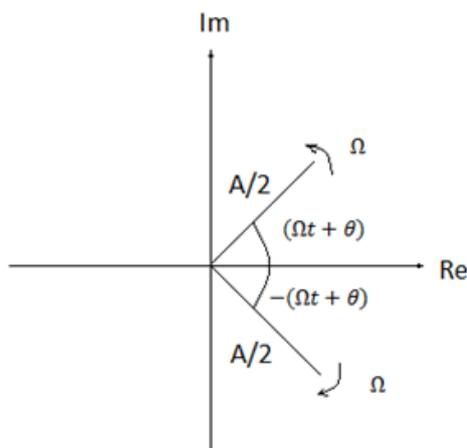
$$e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j \sin\phi \quad (6.6)$$

Por definição, a frequência é uma grandeza física inerentemente positiva, isso é óbvio se interpretar a frequência como um número de ciclos por unidade de tempo em um sinal periódico. No entanto, em muitos casos, apenas por conveniência matemática, introduz-se frequências negativas. Assim, o sinal senoidal (6.1) pode ser expresso como, a qual segue de (6.6).

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\Omega t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\Omega t + \theta)} \quad (6.7)$$

Observa-se que o sinal senoidal pode ser obtido adicionando dois sinais exponenciais complexo-conjugado da amplitude, às vezes chamados de fasores, ilustrado na *Fig – 6.2*. Com o tempo passando os fasores giram em direções opostas com frequências angulares de  $\pm\Omega$  radianos por segundo. Visto que uma frequência positiva corresponde ao movimento angular uniforme anti-horário, uma frequência negativa corresponde simplesmente ao movimento angular no sentido horário.

Por conveniência matemática, ambas as frequências negativas e positivas são usadas ao longo desse trabalho. Portanto, a faixa de frequência para sinais senoidais analógicos é de  $-\infty < F < +\infty$ .



**Figura 6.2 - Representação de uma função cosseno por um par de exponenciais complexas-conjugadas (fasores).**

### 6.3 SINAIS SENOIDAIS DISCRETOS NO TEMPO

Um sinal senoidal discreto no tempo pode ser expresso como:

$$x(n) = A \cos(\omega n + \theta), -\infty < n < \infty \quad (6.8)$$

Onde,  $n$  é uma variável inteira, chamada de número amostral,  $A$  é a amplitude senoidal,  $\omega$  é a frequência em radianos por amostra e  $\theta$  é a fase em radianos.

Se em vez da frequência  $\omega$ , for usada a frequência  $f$  como variável, então:

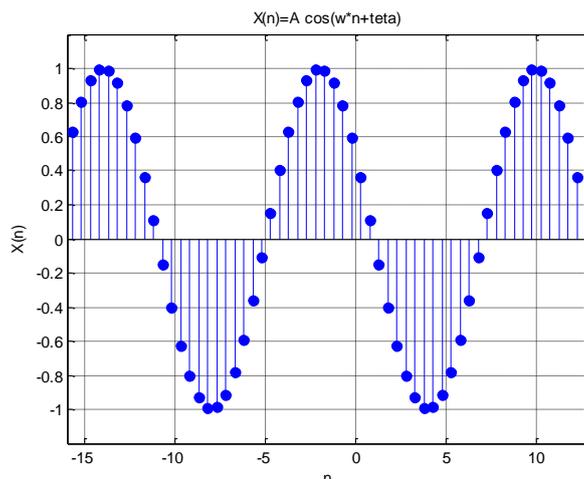
$$\omega = 2\pi f \quad (6.9)$$

e a relação (6.8) se torna;

$$x(n) = A \cos(2\pi f n + \theta), -\infty < n < \infty \quad (6.10)$$

A frequência  $f$  tem dimensões de ciclos por amostra. Na Capítulo 8 considera-se a amostragem do seno analógico, relacionada com a variável frequência  $f$  de uma senoidal discreta no tempo com a frequência  $F$  em ciclos por segundo para a senoidal analógica. Para o momento considera-se um seno discreto no tempo em (6.8) independentemente da senoidal contínua no tempo dada em (6.1). A Fig – 6.3 mostra o seno com frequência  $\omega = \pi/6$  radianos por amostra ( $f = \frac{1}{12}$  ciclos por amostra) e fase  $\theta = \pi/3$ .

```
% SINAL DISCRETO
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
A=1; % Amplitude do Sinal Discreto
n=[-5*pi:0.5:4*pi]; % Tempo discreto
w=pi/6;% Frequência Angular
teta=pi/3; % Defasagem
x = A*cos(w*n+teta); % Sinal da moduladora
stem(n,x, 'ob', 'filled') % Criar Gráfico Discreto
axis ([-16 13 -1.2 1.2])
title('X(n)=A cos(w*n+teta)')
xlabel('n')
ylabel('X(n)')
hold on
grid
```



**Figura 6.3 - Exemplo de um sinal senoidal discreto no tempo**  
( $\omega = \pi/6$  e  $\theta = \pi/3$ ).

Em contraste com a senoidal contínua no tempo, o seno discreto no tempo são caracterizadas pelas seguintes propriedades: (**PROAKIS**, p. 17 – 18).

1▪ A senoidal discreta no tempo é periódica somente se sua frequência  $f$  é um número racional.

Por definição, um sinal discreto no tempo  $x[n]$  é periódico com o período  $N(N > 0)$ , se e somente se:

$$x[n + N] = x[n], \quad \forall n \quad (6.11)$$

O menor valor de  $N$  para o qual (6.11) é verdadeira é chamada de período fundamental.

A prova da periodicidade é simples, para um seno com frequência  $f_0$  ser periódico deve ter:

$$\cos[2\pi f_0(N + n) + \theta] = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

Essa relação é verdadeira se e somente, se existe um inteiro  $k$  tal que;

$$2\pi f_0 N = 2k\pi$$

ou, equivalentemente.

$$f_0 = \frac{k}{N} \quad (6.12)$$

De acordo com a (6.12), um sinal senoidal discreto no tempo é periódico somente se a sua frequência  $f_0$ , pode ser expressa como uma relação de dois inteiros (i.e.,  $f_0$  é racional).

Para determinar o período fundamental  $N$  de um seno periódico expresso pela sua frequência  $f_0$ , como em (6.12) e cancelar os fatores comuns de modo que  $k$  e  $N$  são relativamente primos entre si. Então o período fundamental do seno é igual a  $N$ . Observe que uma pequena mudança na frequência pode resultar em uma mudança grande no período. Por exemplo, note que  $f_1 = 30/1800$  implica que  $N_1 = 60$ , enquanto que  $f_2 = 30/60$ , resulta em  $N_2 = 2$ .

2▪ Senos discretos no tempo cujas frequências são separadas por um múltiplo inteiro de  $2\pi$  são iguais.

Para provar esta afirmativa, considere a função senoidal  $\cos(\omega_0 n + \theta)$ . Segue-se que:

$$\cos[(\omega_0 + 2\pi)n + \theta] = \cos(\omega_0 n + 2\pi n + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta) \quad (6.13)$$

Como resultado, todas as sequências senoidais.

$$x_k(n) = A \cos(\omega_k n + \theta), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.14)$$

São indistinguíveis (i.e., idênticas).

$$\omega_k = \omega_0 + 2k\pi, \quad -\pi \leq \omega_0 \leq \pi$$

Por outro lado, as sequências de duas quaisquer senoidais com frequências na faixa de,  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  ou  $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$  são equivalentes. Consequentemente, sinais

senoidais no tempo discreto com frequências,  $|\omega| \leq \pi$  ou  $|f| \leq \frac{1}{2}$  são similares. Qualquer sequência resultante de um seno com uma frequência  $|\omega| > \pi$  ou  $|f| > \frac{1}{2}$  é idêntica a uma sequência obtida de um sinal senoidal com a frequência  $|\omega| < \pi$  ou  $|f| < \frac{1}{2}$ . Devido a essa semelhança uma senoidal com frequência  $|\omega| > \pi$  denomina-se uma identidade falsa (*alias*) do seno correspondente com frequência  $|\omega| < \pi$ . Assim, as frequências na faixa  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  ou  $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$  são únicas e todas as frequências  $|\omega| > \pi$  ou  $|f| > \frac{1}{2}$  são análogas. Pode-se observar a diferença entre os senos discretos no tempo e no tempo contínuo, onde o resultado posterior nos sinais distintos para  $\Omega$  ou  $F$  em toda a faixa inteira  $-\infty < \Omega < \infty$  ou  $-\infty < F < \infty$ .

**3•** A mais alta taxa de oscilação em uma senoidal no tempo discreto é atingida quando  $\omega = \pi$  (ou  $\omega = -\pi$ ) ou, equivalente,  $f = \frac{1}{2}$  (ou  $f = -\frac{1}{2}$ ). Para ilustrar essa propriedade, investiga-se a sequência das características do sinal senoidal.

$$x[n] = \cos \omega_0 n$$

Quando a frequência varia de 0 a  $\pi$ . Para simplificar o argumento, toma-se valores de  $\omega_0 = 0, \pi/8, \pi/4, \pi/2, \pi$  correspondendo a  $f = 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ , as quais resultam em sequências periódicas  $N = \infty, 16, 8, 4, 2$  como na *Fig – 1.13*. Note que o período do seno diminui à medida que a frequência aumenta. De fato, vê-se que o período de oscilação diminui quando a frequência aumenta.

```
% CARACTERISTICA DO SINAL SENOIDAL DISCRETO
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
n=[-15:1:15]; % Tempo discreto
w0=0;% Frequência Angular
x = cos(w0*n); % Sinal Senoidal Discreto
subplot(2,2,1)
stem(n,x,'b','filled') % Criar Gráfico Discreto
grid
xlabel('n'); ylabel('x(n)')
title('w0=0 ==> f=0')
w0=pi/8;% Frequência Angular
x = cos(w0*n); % Sinal Senoidal Discreto
subplot(2,2,2)
stem(n,x,'b','filled') % Criar Gráfico Discreto
```

```

grid
xlabel('n');ylabel('x(n)')
title('w0=pi/8 ==> f=1/16')
w0=pi/4;% Freqüência Angular
x = cos(w0*n); % Sinal Senoidal Discreto
subplot(2,2,3)
stem(n,x,'b','filled') % Criar Gráfico Discreto
grid
xlabel('n'); ylabel('x(n)')
title('w0=pi/4 ==> f=1/8')
w0=pi/2;% Freqüência Angular
x = cos(w0*n); % Sinal Senoidal Discreto
subplot(2,2,4)
stem(n,x,'b','filled') % Criar Gráfico Discreto
grid
xlabel('n'); ylabel('x(n)')
title('w0=pi/2 ==> f=1/4')
hold on

```

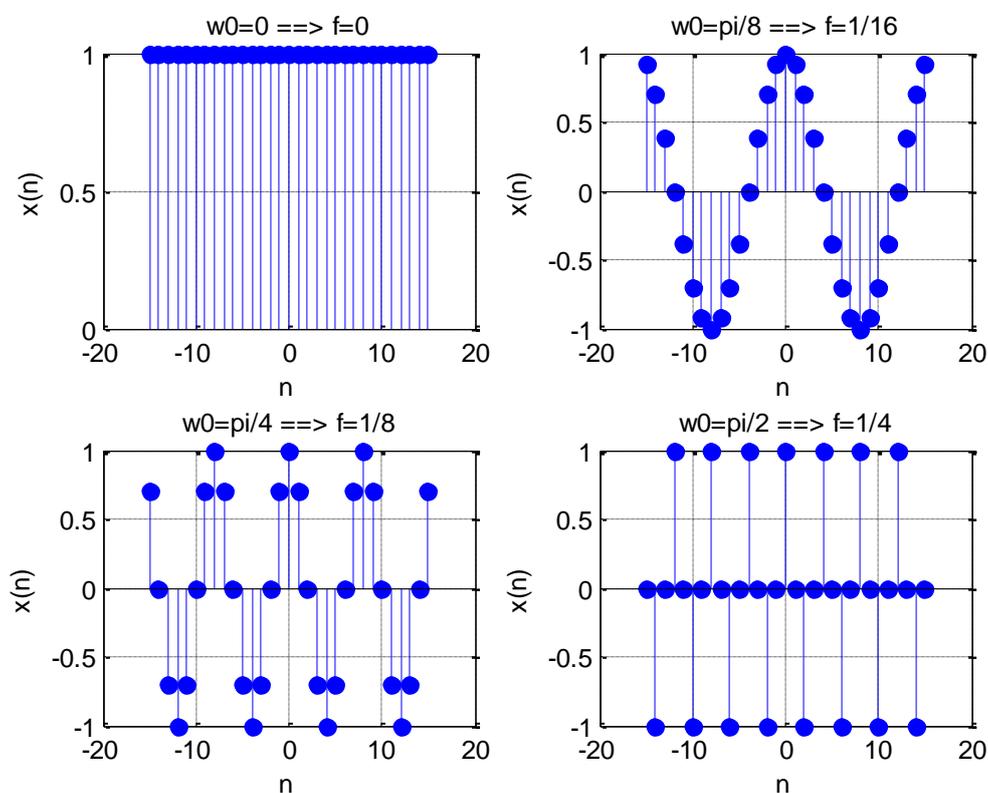


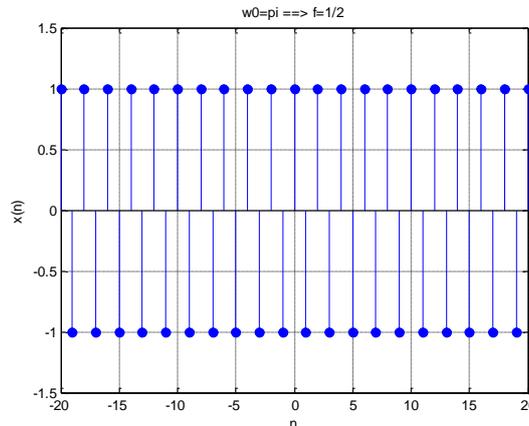
Figura 6.4 - Característica do sinal senoidal discreto.

```

% CARACTERISTICA DO SINAL SENOIDAL DISCRETO
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
n=[-20:1:20]; % Tempo discreto
w0=pi;% Freqüência Angular
x = cos(w0*n); % Sinal Senoidal Discreto
stem(n,x,'b','filled') % Criar Gráfico Discreto
grid

```

```
axis ([-20 20 -1.5 1.5])
xlabel('n'); ylabel('x(n)')
title('w0=pi ==> f=1/2')
hold on
```



**Figura 6.5 - Característica do sinal senoidal discreto para  $\omega_0 = \pi \Rightarrow f = 1/2$ .**

Observe o que acontece em  $\pi \leq \omega_0 \leq 2\pi$ , considere o seno com frequências  $\omega_1 = \omega_0$  e  $\omega_2 = 2\pi - \omega_0$ . Perceba que como  $\omega_1$  varia de  $\pi$  a  $2\pi$ ,  $\omega_2$  varia de 0 a  $\pi$  e pode ser facilmente, visto que:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= A \cos \omega_1 n = A \cos \omega_0 n \\ x_2[n] &= A \cos \omega_2 n = A \cos(2\pi - \omega_0)n \\ &= A \cos(\omega_0 n) = x_1[n] \end{aligned} \quad (6.15)$$

Visto que  $\omega_2$  é um forma semelhante de  $\omega_1$ . Se usar a função seno em vez da função cosseno, o resultado seria basicamente o mesmo, exceto por uma diferença de fase ( $180^\circ$ ) entre as senóides  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$ . Em qualquer caso, à medida que a frequência relativa  $\omega_0$  da senóide no tempo discreto aumenta de  $\pi$  para  $2\pi$  sendo que seu período de oscilação diminui. Para  $\omega_0 = 2\pi$  o resultado é um sinal constante, como no caso de  $\omega_0 = 0$ . Obviamente, para  $\omega_0 = \pi$  (ou  $f = \frac{1}{2}$ ) tem-se um período de oscilação maior.

Como para o caso de sinais contínuos no tempo, a frequência negativa pode ser introduzida, bem como para sinais discretos no tempo. Para esse propósito utiliza-se a identidade:

$$x(n) = A \cos(\omega n + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\omega n + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega n + \theta)} \quad (6.16)$$

Desde que, sinais senoidais discreto no tempo com frequencias que são separadas por multiplo inteiro de  $2\pi$  são idênticos, segue que as frequencias em qualquer intervalo  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_1 + 2\pi$  constitui todas as senoides discretas ou exponenciais complexas existentes no tempo. Daí a faixa de freqüência para as senóides discreta no tempo é finita com duração de  $2\pi$ . Usualmente, escolhe-se a banda de  $0 \leq \omega \leq 2\pi \Rightarrow (0 \leq f \leq 1)$  ou  $-\pi \leq \omega \leq \pi \Rightarrow (-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2})$ , as quais chama-se de faixa fundamental.

## CAPÍTULO 7

### 7.1 EXPONENCIAIS COMPLEXAS RELACIONADAS

#### HARMONICAMENTE

Sinais senoidais e exponenciais complexos desempenham um papel importante na análise de sinais e sistemas. Em alguns casos, os conjuntos de exponenciais complexas (ou senos) estão relacionados harmonicamente. Existem conjuntos de exponenciais complexas periódicas com frequências fundamentais que são múltiplas de uma frequência positiva única. Apesar da discursão nesse trabalho ser limitada, assegura-se claramente as mesmas propriedades das exponenciais complexas para os sinais senoidais. Considera-se essa relação, tanto no tempo contínuo como no discreto.

### 7.2 EXPONENCIAIS CONTÍNUAS NO TEMPO

O sinal básico para a exponencial relacionada harmonicamente no tempo contínuo é:

$$s_k(t) = e^{jk\Omega_0 t} = e^{j2k\pi F_0 t} \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.1)$$

Observa-se que para cada valor de  $k$ ,  $s_k(t)$  é periódico com período fundamental  $1/(kF_0) = T_p/k$  ou frequência fundamental  $kF_0$ . Visto que, um sinal que é periódico com período  $T_p/k$  é também periódico com período  $k(T_p/k) = T_p$  para qualquer  $k$  inteiro e positivo, percebe-se que todo  $s_k(t)$  tem período comum  $T_p$ . Sendo

permitido a  $F_0$  tomar qualquer valor e todos os membros do conjunto são distintos, no sentido que se  $k_1 \neq k_2$ , então  $s_{k_1} \neq s_{k_2}$ .

A partir dos sinais básicos em (7.1), constrói-se uma combinação linear de exponenciais complexas relacionadas harmonicamente na forma:

$$x_a(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} C_k s_k(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t} \quad (7.2)$$

Onde:  $C_k$ , para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  são as constantes complexas arbitrárias. O sinal  $x_a(t)$  é periódico com período fundamental  $T_p = 1/F_0$  e sua representação em termos de (7.2) é chamada de expansão série de *Fourier* de  $x_a(t)$ . Os valores das constantes complexas são os coeficientes da série de *Fourier* e o sinal  $s_k(t)$  é chamado o  $k$  – éximo harmônico de  $x_a(t)$ .

### 7.3 EXPONENCIAIS DISCRETAS NO TEMPO

Visto que uma exponencial complexa discreta no tempo é periódica se sua frequência relativa é um número racional. Escolhe-se  $f_0 = 1/N$  e define-se o conjunto de exponenciais complexas relacionadas harmonicamente por:

$$s_k(n) = e^{j2k\pi f_0 n}, \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.3)$$

Em contraste com o tempo contínuo, observa-se que:

$$s_k(n) = e^{j2\pi n(k+N)/N} = e^{j2\pi nk/N} e^{j2\pi n} = e^{j2\pi n} s_k(n) = s_k(n)$$

Isso significa a consistência com (6.11), existindo somente  $N$  exponenciais complexas periódicas distintas no conjunto descrito por (7.3). Além disso, todos os membros do conjunto tem um período comum de  $N$  amostras. Claramente, pode-se escolher qualquer exponencial complexa  $h^i$  consecutiva de  $k = n_0$  a  $k = n_0 + N - 1$  para formar um conjunto relacionado harmonicamente com frequência fundamental  $f_0 = 1/N$ . Na maioria das vezes, por conveniência, escolhe-se o conjunto que corresponde a  $n_0 = 0$ , que é o conjunto:

$$s_k(n) = e^{j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.4)$$

Como no caso contínuo no tempo é obvio que a combinação linear, resulta

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k S_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j2\pi kn/N} \quad (7.5)$$

em um sinal periódico com período fundamental  $N$ . Como se vê a posteriori essa é a representação da série de *Fourier* para uma sequência periódica discreta no tempo com os coeficientes de *Fourier*  $\{C_k\}$ . A sequência  $S_k(n)$  é chamada de  $k$  – éximo harmônico de  $x(n)$ .

Conforme se vê na memória de um processador de sinal digital, um ciclo do sinal senoidal  $x(n) = \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{N} + \theta\right)$  armazenado. Onde:  $\theta = 2\pi q/N$ , onde  $N$  e  $q$  são inteiros.

(a) Determinar como essa tabela de valores, pode ser usada para obter valores senoidais relacionados harmonicamente tendo a mesma fase.

(b) Determinar como essa tabela, pode ser usada para obter senos de mesma frequência mais com fases diferentes.

Solução:

(a) Faça  $x_k(n)$  denotar a sequência do sinal senoidal  $x(n) = \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{N} + \theta\right)$ .

Isso é um seno com frequência  $f_k = k/N$ , o qual é harmonicamente relacionado  $x(n)$ . Porém  $x_k(n)$  pode ser expresso como:

$$x_k(n) = \text{sen}\left[\frac{2\pi(kn)}{N} + \theta\right] = x(kn)$$

Assim, observa-se que  $x_k(0) = x(0)$ ,  $x_k(1) = x(k)$ ,  $x_k(2) = x(2k)$  e assim por diante. Portanto a sequência senoidal  $x_k(n)$  pode ser obtida da tabela de valores de  $x(n)$  tomando-se cada  $k$  – éximo valor de  $x(n)$ , começando com  $x(0)$ . Dessa forma, podem ser gerados todos os valores dos senos relacionados harmonicamente com frequências  $f_k = k/N$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

(b) Controlando a fase  $\theta$  do seno com frequência  $f_k = k/N$  toma-se o primeiro valor de memória da locação da sequência  $q = \frac{\theta N}{2\pi}$ , onde  $q$  é um inteiro. Assim a fase inicial  $\theta$  da tabela controla a localização da onda e a tabela é preenchida cada vez que o índice  $(kn)$  excede  $N$ .

## CAPÍTULO 8

### 8.1 CONVERSÃO DO SINAL ANALÓGICO PARA DIGITAL E VICE –

#### VERSA

A maioria dos sinais de interesse prático, tais como voz, sinais biológicos, os sinais sísmicos, sinais de radar, sinais de sonar e vários sinais de comunicações, tais como sinais de áudio e de vídeo são analógicos. Para processar os sinais analógicos por meios digitais, é primeiro necessário convertê-los em uma forma digital, isto é, para convertê-los em uma sequência de números tendo uma precisão finita. Este procedimento é chamado de conversão analógico-digital ( $A/D$ ), e os dispositivos correspondentes são chamados conversores ( $ADC_S$ ).

Conceitualmente, vê-se a conversão  $A/D$  como um processo de três passos. Este processo é ilustrado na *Fig – 8.1*. (PROAKIS, p. 21 – 22).

1. **Amostragem** – Esta é a conversão de um sinal contínuo no tempo em um sinal discreto no tempo obtido tomando-se "amostras" do sinal contínuo no tempo em instantes discreto no tempo. Assim, se  $x_a(t)$  é a entrada padrão, a saída é  $x_a(nT) \equiv x(n)$ , onde  $T$  é chamado o *intervalo de amostragem*.

2. **Quantização** – Essa é a conversão de um valor do sinal discreto no tempo em um valor de sinal discreto quantizado. O valor de cada sinal amostrado é representado por um valor selecionado de um conjunto finito de valores possíveis. A diferença entre a amostra não quantizada  $x[n]$  e a saída quantizada  $x_q[n]$  é chamada erro de quantização.

3. **Codificação** – No processo de codificação cada valor discreto  $x_q[n]$  é representado por uma sequência binária de  $b$  – bits.

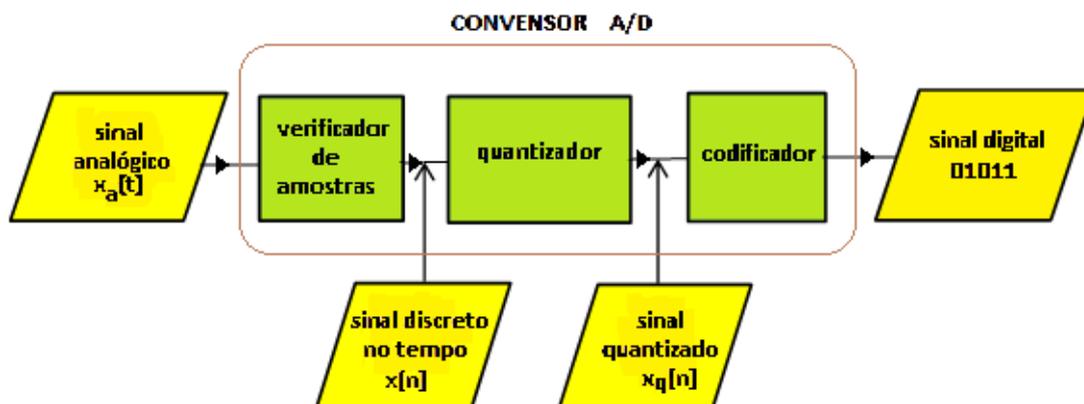


Figura 8.1 - Parte básicas de um conversor analógico para digital (A/D).

Embora o modelo de conversão  $A/D$  seguido de uma amostragem, por uma quantização e um codificador. Na prática, a conversão  $A/D$  é realizada por um dispositivo simples que toma  $x_a(t)$  e produz um número binário codificado. As operações de amostragem e quantização podem ser executadas em qualquer ordem mas, na prática, a amostragem é sempre realizada antes da quantização.

Em muitos casos de interesse prático (por exemplo, processamento de voz), é melhor converter os sinais digitais processado em uma forma analógica. (Obviamente, não vê-se a sequência de amostras representando o sinal de voz, nem os números correspondente a um sinal de TV.) O processo de conversão de um sinal digital em um sinal analógico é conhecido como conversão digital para analógico ( $D/A$ ). Todos os conversores  $D/A$  "ligado por pontos" em um sinal digital são executados por algum tipo de interpolação, cuja precisão depende do processo da qualidade do conversor  $D/A$ . A Fig – 8.2 ilustra uma forma simples de conversão  $D/A$ , chamada de um retentor de ordem zero ou uma aproximação por escada. Outras aproximações são possíveis, tais como uma conexão de um par de amostras linearmente sucessivas (interpolação linear), ajustando uma quadrática através de três amostras sucessivas (interpolação quadrática), e assim por diante. Existe um interpolador ótimo (ideal)?

Para sinais tendo um conteúdo de frequência limitada (largura de faixa finita), o teorema da amostragem especifica a forma ideal de interpolação.

Em particular, demonstra-se que a amostragem não resulta em perda de informações, nem introduz distorção no sinal, se a largura de faixa do sinal é finita. Em princípio, o sinal analógico pode ser reconstruído a partir das amostras, desde que a taxa de amostragem seja suficientemente alto para evitar o problema comumente chamado de *aliasing*. Por outro lado, a quantização é um processo irreversível ou não reversível, que resulta em distorção do sinal. Mostra-se que a quantidade de distorção é dependente da precisão, como medida de um número de bits, no processo de conversão  $A/D$ . Os fatores que afetam a mudança da precisão desejada do conversor  $A/D$  são taxa de amostragem e o custo. Em geral, o custo aumenta com um aumento na precisão e /ou taxa de amostragem.

```
% CONVERSÃO DIA USANDO RETENTOR DE ORDEM ZERO OU APROXIMAÇÃO ESCADA
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
x=0:0.2:3*pi;y=cos(x/2)+cos(x/8);
stem(x,y,'fill');
xlabel('INTERVALO DE AMOSTRAGEM'); ylabel('AMPLITUDE'); % Rótulos
dos Eixos
title('CONVERSÃO DIGITAL PARA ANALÓGICA (DIA)')
legend('Sinal Original')
text(2.5*pi,1.7*sin(pi/2),...
     ['Aproximação Por Escada'],...
     'HorizontalAlignment','center',...
     'BackgroundColor',[.7 .9 .7]);
hold on
```

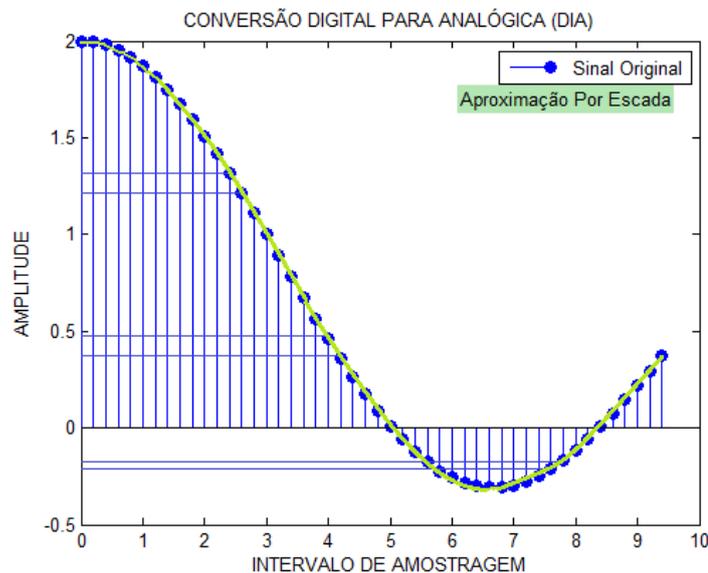


Figura 8.2 – Conversão ( $D/A$ ) digital para analógica usando retentor de ordem zero.

## CAPÍTULO 9

### 9.1 TEOREMA DA AMOSTRAGEM

Dado qualquer sinal analógico, como selecionar o período de amostragem  $T$  ou equivalentemente, a taxa de amostragem  $F_s$ ? Para responder essa questão, deve-se ter alguma informação sobre as características do sinal a ser amostrado. Em particular, algumas informações gerais relativo ao conteúdo da frequência do sinal, tais informações estão geralmente disponíveis. Por exemplo, geralmente as principais componentes de um sinal de voz a frequência decaem abaixo de  $3000\text{ Hz}$ . Por outro lado, os sinais de televisão em geral, contêm componentes de frequência importantes até  $5\text{ MHz}$ . O conteúdo de tais sinais limitam-se as amplitudes, frequências, e fases das várias componentes de frequência, o detalhe mais importante das características de tais sinais é que não está disponível a priori para obtenção dos sinais. De fato, a finalidade de processar os sinais é, geralmente, extrair essas informações mais detalhadas. No entanto, conhece-se a classe geral do conteúdo de frequência máxima dos sinais (i. e., a classe dos sinais de voz, a classe de sinais de vídeo, etc...). Especificando-se a taxa de amostragem necessária para converter o sinais analógicos em digitais.

Suponha-se que qualquer sinal analógico pode ser representada como uma soma de senóides de diferentes amplitudes, frequências e fases, isso é.

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi F_i t + \theta_i) \quad (9.1)$$

onde  $N$  denota os números de componentes de frequência. Todos os sinais, como voz e vídeo, se prestam a tais representações sobre qualquer segmento de tempo pequeno. As amplitudes, frequências e fases normalmente mudam suavemente em um segmento de tempo para outro. Contudo, suponha que as frequências não excedam alguma frequência conhecida, como a  $F_{max}$ . Por exemplo,  $F_{max} = 3000\text{ Hz}$  para a classe de sinais de voz e  $F_{max} = 5\text{ MHz}$  para os sinais de televisão. Visto que, a frequência máxima pode variar suavemente de quantidades diferentes para realizações de sinais de qualquer classe dada (por exemplo, pode variar um pouco de auto falante para auto falante), o que se deve garantir é que  $F_{max}$  não exceda um certo valor pré-determinado, passando o sinal analógico

através de um filtro que rigorosamente atenuada componentes de frequência acima de  $F_{max}$ . Assim, garante que nenhum sinal nas classe das componentes que contem a frequência fique (com amplitude ou potência) acima  $F_{max}$ . Na prática, tais filtros são geralmente utilizados antes da amostragem.

Através da  $F_{max}$ , pode-se selecionar a taxa de amostragem apropriada. Sabe-se que a frequência mais alta de um sinal analógico pode ser reconstruído de forma inequívoca quando o sinal é amostrado a uma taxa  $F_s = 1/T$  ou  $F_s/2$ . Qualquer frequência acima  $F_s/2$  ou abaixo  $-F_s/2$  resultados em amostras que são idênticas com a frequência correspondente no intervalo  $-F_s/2 \leq F \leq F_s/2$ . Para evitar as ambiguidades resultantes no *aliasing*, seleciona-se uma taxa de amostragem suficientemente elevada. Ou seja,  $F_s/2$  deve ser maior do que  $F_{max}$ , evitando o problema de *aliasing*, de modo que  $F_s$  seja:

$$F_s > 2F_{max} \quad (9.2)$$

onde  $F_{max}$  é a maior componente de frequência do sinal analógico. Com a taxa de amostragem selecionados dessa maneira, qualquer componente de frequência, com  $|F_i| < F_{max}$ , no sinal analógico é mapeado em uma senóide discreta no tempo com frequência:

$$-\frac{1}{2} \leq f_i = \frac{F_i}{F_s} \leq \frac{1}{2} \quad (9.3)$$

ou, de forma equivalente,

$$-\pi \leq \omega_i = 2\pi f_i \leq \pi \quad (9.4)$$

Visto que,  $|f| = \frac{1}{2}$  ou  $|\omega| = \pi$  é a única frequência mais alta de um sinal discreto no tempo, a mudança de uma taxa de amostragem de acordo com 9.2 evita o problema de *aliasing*. Em outras palavras, a condição  $F_s > 2F_{max}$  garante que todas as componentes senoidais estão mapeadas em componentes correspondentes de frequências discretas no tempo dentro do intervalo fundamental. Assim, todas as componentes de frequências do sinal analógico estão representadas em uma forma de amostragem sem ambiguidade, e

portanto, o sinal analógico pode ser reconstruído sem distorção dos valores das amostras usando uma interpolação apropriada (conversão digital-analógico). A fórmula de interpolação ideal ou apropriada é especificada pelo teorema da amostragem.

Se a frequência mais elevada contida no sinal analógico  $x_a(t)$  é  $F_{max} = B$  e o sinal é amostrado a uma taxa  $F > 2F_{max} \equiv 2B$  em seguida  $x_a(t)$  pode ser recuperado usando por exemplo a função de interpolação:

$$g(t) = \frac{\text{sen } 2\pi Bt}{2\pi Bt} \quad (9.5)$$

Assim  $x_a(t)$  pode ser expresso como:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right) \quad (9.6)$$

Onde  $x_a(n/F_s) = x_a(nT) \equiv x[n]$  são as amostras de  $x_a(t)$ .

Quando a escolha de amostras de  $x_a(t)$  é realizada a uma taxa mínima de amostragem  $F_s = 2B$ , a fórmula na reconstrução (9.6) se torna;

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\text{sen } 2\pi B(t - n/2B)}{2\pi B(t - n/2B)} \quad (9.7)$$

A taxa de amostragem  $F_s = 2B = 2F_{max}$  chama-se a taxa de Nyquist, a *Fig – 9.1* ilustra o processo de conversão ideal *D/A* usando a função de interpolação em (9.5).

```
% CONVERSÃO D/A POR INTERPORLAÇÃO
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
x1=0:0.01:pi;y1=sin(x1);x2=0:0.01:pi/2;y2=cos(x2);
x3=pi/2:0.01:3*pi/2;y3=sin(x3-pi/2);x4=pi:0.01:2*pi;y4=-sin(x4);
x5=3*pi/2:0.01:2*pi;y5=cos(x5);
plot(x1,y1,'g',x2,y2,'r',x3,y3,'k',x4,y4,'c',x5,y5);
xlabel('INTERVALO DE AMOSTRAGEM'); ylabel('AMPLITUDE'); % Rótulos
dos Eixos
title('CONVERSÃO DIGITAL PARA ANALÓGICA')
text(pi,1.1*sin(pi/2),...
      ['Amostras de xa(t)'],...
      'HorizontalAlignment','center',...
      'BackgroundColor',[.7 .9 .7]);
hold on
```

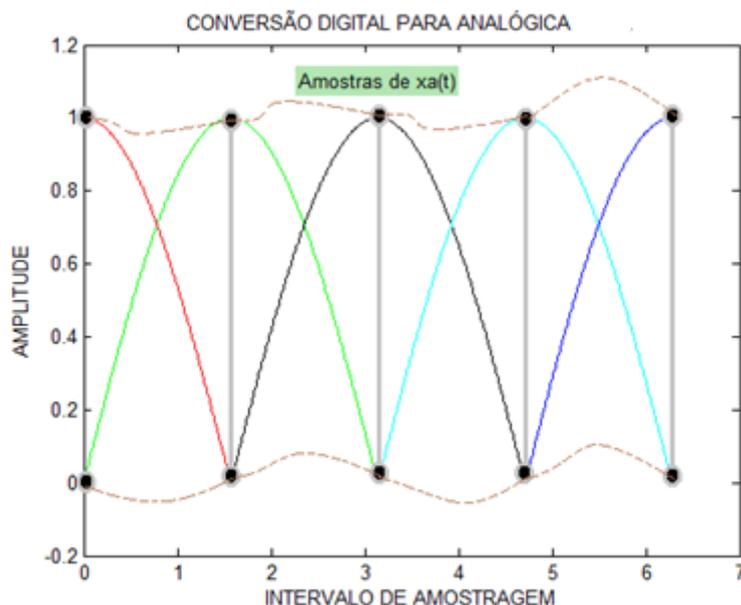


Figura 9.1 - Conversão digital para analógica ideal (interpolação).

Como pode ser observado a partir de qualquer expressão (9.6) ou (9.7), a reconstrução de  $x_a(t)$  a partir da sequência  $x[n]$  é um processo complicado, envolvendo uma soma ponderada da função de interpolação  $g(t)$  e é versões deslocadas no tempo  $g(t - nT)$  para  $-\infty < n < \infty$ , onde os fatores de ponderação são as amostras de  $x[n]$ , devido à complexidade e o número infinito de amostras exigidas em (9.6) ou em (9.7), desta reconstrução. A reconstrução do sinal original é um processo de interpolação que matematicamente define um sinal contínuo no tempo  $x_a(t)$  a partir de amostras discretas  $x[n]$  e, às vezes, entre os instantes de amostragem  $n/F_s$ .

## 9.2 FUNÇÃO SINC

Cada valor de amostra é multiplicado pela Sinc dimensionada, de modo que os cruzamentos do zero da função ocorram nos instantes de amostragem e que o ponto central da função Sinc seja deslocado para o tempo daquela amostra,  $n/F_s$ . Todas essas funções dimensionadas e deslocadas são então somadas umas com as outras, para se recuperar o sinal original. As funções deslocadas no tempo e dimensionadas são contínuas, fazendo

com que a soma das mesmas também sejam contínuas, de modo que o resultado seja contínuo, respeitando é claro a condição de Nyquist.

Esta reconstrução ou interpolação na prática é impossível, pois ela requer a soma de infinitos termos.

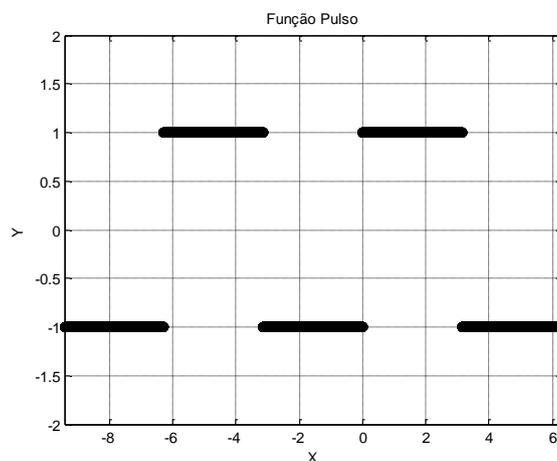
Existe uma relação direta entre a forma exponencial complexa e a forma em termos de senos e cossenos da série de Fourier. Devido à relação entre os coeficientes das duas formas, ou seja, para  $h > 0$ , pode-se obter os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$ , ou seja:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \cos(h\omega t) d\omega t \quad \Rightarrow \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \sin(h\omega t) d\omega t \quad (9.8)$$

Observe que:  $e^{jh\omega t}$  é um operador de rotação cuja amplitude é 1. Portanto, cada coeficiente  $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) e^{-jh\omega t} d\omega t$  corresponde ao valor médio da função  $f(\omega t)$ , ponderada pelo operador que gira com velocidade  $h\omega$ , a qual define a periodicidade harmônica.

O Trem de Pulsos conforme a *Fig – 9.2*:

```
% Trem de Pulsos
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
x1=-3*pi:0.001:-2*pi;y1=-1;
x2=-2*pi:0.001:-pi;y2=1;
x3= -pi:0.001:0;y3=-1;
x4= 0:0.001:pi;y4=1;
x5=pi:0.001:2*pi;y5=-1;
plot(x1,y1,'ok',x2,y2,'ok',x3,y3,'ok',x4,y4,'ok',x5,y5,'ok')
axis([-3*pi 2*pi -2 2])
xlabel( ' X ' ); ylabel( ' Y ' ); % Rótulos dos Eixos
title( 'Função Pulso' )
grid
hold on
```



**Figura 9.2 - Função trem de pulsos unitários.**

Esse sinal é importante para se chegar à Transformada de Fourier. Fazendo  $T = 2\pi/\omega$ , o pulso com amplitude 1 e duração  $\Delta t = 2\pi/k$ . Observe que  $k$  inteiro pode ser interpretado como uma frequência múltipla de  $\omega$ , uma vez que  $\Delta t$  é uma fração de  $T$ . Sabe-se que os coeficientes da série complexa de Fourier da função pulso são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{k} \text{ e } a_n = \frac{1}{nk} \text{sen}\left(n \frac{\pi}{k}\right) \quad (9.9)$$

Logo, o trem de pulsos pode ser reescrito como sendo a série:

$$f(x) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{\text{sen}\left(n \frac{\pi}{k}\right)}{n \frac{\pi}{k}} \cdot e^{jnx} \quad (9.10)$$

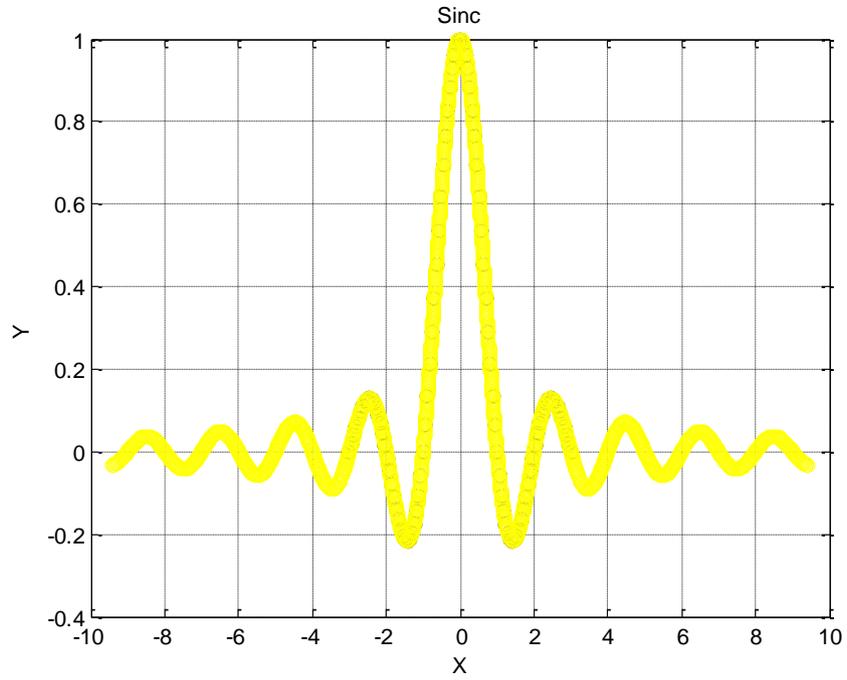
A fração  $\frac{\text{sen}\left(n \frac{\pi}{k}\right)}{n \frac{\pi}{k}}$  é chamada função Sinc, esta função define a envoltória para os valores dos coeficientes  $a_n$  do trem de pulsos, verifica-se que os coeficientes são definidos para as abcissas da função sinc apenas para valores específicos ou discretos. Podemos visualizar o que ocorre com os coeficientes do trem de pulsos, quanto menor a duração do pulso (maior  $k$ ), mais os coeficientes se aproximam e diminuem de amplitude. Se, ao invés de reduzir a duração, aumentar o período entre pulsos  $T$ , tem-se, no limite, um trem de pulsos com período infinito, ou seja, apenas um pulso na origem. Com isso, a frequência fundamental  $\omega = 2\pi/T$  tende a zero, e as componentes se aproximam tanto que formam um espectro contínuo com amplitudes infinitesimais, como  $a_n$  tende a zero, enquanto  $T$  tende a infinito, o produto  $a_n \cdot T$  tende a uma constante. Deste modo:

$$\mathfrak{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (9.11)$$

Onde  $\mathfrak{F}(\omega)$  é chamada transformada ou integral de Fourier.

```
%FUNÇÃO SINC
clear all; % ==> Limpa área de trabalho
close all; % ==> Fecha todas as janelas de figuras
x1 = linspace(-3,3);
y1 = sinc(x1);
x2=-3*pi:0.001:3*pi;
y2=sinc(x2);
plot(x1,y1,'ok',x2,y2,'oy')
```

```
xlabel( ' X ' ); ylabel( ' Y ' ); % Rótulos dos Eixos  
title( 'Sinc' )  
hold on  
grid
```



## CONCLUSÃO

A finalidade deste trabalho é apresentar aos acadêmicos do Curso de Física da Instituição UNIFESSPA as informações preliminares do processamento analógico, digital, suas relações inerentes, técnicas, terminologias, operações matemáticas, conversões e amostragens. Lembrando que a maioria dos sinais encontrados na natureza são contínuos e que o processo é realizado em sistemas físicos, como: computadores, filtros, analisadores de frequências, radares, aparelhos biológicos e outros. Uma vez, que o curso não contém o tópico citado em seu projeto pedagógico curricular, porém existe um outro ramo desta ciência que esta em evidência e que nas ultimas duas décadas teve uma considerável expansão nos cursos de Física do país, neste século que é a Física Médica no qual tanto o docente como o discente tem que ter algum vestígio do conhecimento mencionado nesta monografia.

Aqui, foram feitos alguns algoritmos executados no software **MatLab** para representar gráficos contínuos, discretos, imagens e conversões. Os esquemas e alguns sistemas de eixos foram construídos no *Paint*, evidentemente, o processamento do sinal digital possui custos mais baratos, rápidos, programáveis e precisos para se projetar e fazer inferências do que o analógico, por isso, é o mais aplicado atualmente em processamentos, sinais e imagens, como por exemplo: canais telefônicos, sismologia, geofísica, explosões nucleares, técnica *RGB*, auto definição de *pixels*, etc... Não se quer generalizar, dizendo que o processamento digital é a solução para todos os problemas, mais para muitos sinais de largura de faixa muito grande processados em tempo real e processamento de sinais ópticos eles são os únicos recursos possíveis.

É mostrado o procedimento de amostragem onde a referência se encontra em determinados valores de frequência encontrados na natureza como a da voz que é de  $3000\text{Hz}$  e a de vídeo que é  $5\text{MHz}$ , por exemplos e a taxa de amostragem não pode ultrapassar esses valores, para poderem ser reconstruídos mais tarde, através da aproximação por escada, interpolação linear ou quadrática.

É comentado a quantização, a codificação e o problema de alising pois qualquer frequência acima ou abaixo da referência resulta em amostras que são idênticas, são estas ambiguidades que resultam o *aliasing* e é demonstrado o teorema Nyquist. Sendo observado que a reconstrução de  $x_a(t)$  a partir da sequência  $x[n]$  é um processo

complicado, envolvendo uma soma ponderada da função interpolação  $g(t)$  e versões deslocadas no tempo  $g(t - nT)$  onde os fatores de ponderação são as amostras de  $x[n]$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] **FERREIRA**, F.C.L. Desenvolvimento de objetos simuladores para medicina nuclear. Tese de doutoramento. Universidade Federal de Sergipe, 2011.
  
- [2] **MATLAB**, The Language of Technical Computing - Version 5.0.0.4069, License number 108479 Pcruz, 1996.
  
- [3] **MIDORIKAWA**, Edson. Projeto de sistemas digitais. Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2012.
  
- [4] **MORAES**, Pedro Cruz. Dicas e Truques do *MatLab*<sup>(R)</sup> – Apostila. Belém-Pa., 2010.
  
- [5] **PROAKIS**, John G. and **MANOLAKIS**, Dimitris G. – Digital signal processing: Principles, Algorithms and Applications. Prentice-Hall International, INC. – Third Edition.