



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
FACULDADE DE FÍSICA

**JOSÉ PEREIRA DA CRUZ**

**SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PELO MÉTODO DAS LINHAS**

**MARABÁ – PA  
AGOSTO DE 2016**

**JOSÉ PEREIRA DA CRUZ**

**SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PELO MÉTODO DAS LINHAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Física da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Física.

**Orientador:** Prof. Dr. Tiago Carvalho Martins.

**MARABA – PA**  
**AGOSTO DE 2016**

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

**Biblioteca II da UNIFESSPA. CAMAR, Marabá, PA**

---

Cruz, José Pereira da

Solução da equação de Laplace pelo método das linhas / José Pereira da Cruz; orientador, Tiago Carvalho Martins. — 2016.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Campus Universitário de Marabá, Instituto de Ciências Exatas, Faculdade de Física, Curso de Física, Marabá, 2016.

1. Modelo matemático. 2. Física matemática. 3. Equações diferenciais parciais. 4. Eletrostática. I. Martins, Tiago Carvalho, orient. II. Título.

CDD: 22. ed.: 511.8

---

**JOSÉ PEREIRA DA CRUZ**

**SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PELO MÉTODO DAS LINHAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Física da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovado em 06 de Agosto de 2016.

**Banca Examinadora**

---

Orientador: Prof. Dr. Tiago Carvalho Martins  
Instituição FAFIS/UNIFESSPA

---

Prof. Fábio Barros de Sousa  
Instituição FAMAT/UNIFESSPA

---

Prof. Dr. Tarciso Silva de Andrade Filho  
Instituição FAFIS/UNIFESSPA

## DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho aos meus pais, familiares e também a todos os professores desta universidade que contribuíram com a minha formação acadêmica.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por ter me conduzidos o “caminho das pedras” e através delas ter me permitido chegar até aqui, dando-me saúde, paz, sabedoria e tranquilidade para vencer os obstáculos que surgiram durante todos os períodos que durou essa graduação.

Ao professor Tiago com sua imensa sabedoria por ter me ajudado a organizar as minhas ideias e ter tirados todas as minhas dúvidas.

Aos meus amigos Arnaldo Gonçalves de Matos, Heber Cruz Silva e Rafael Fróis da Silva e os demais famílias que direto e indiretamente me incentivaram para continuar acreditando em meus objetivos. E principalmente aos meus queridos pais que muitos embora não estejam mais conosco deram-me a oportunidade a vida para que hoje eu pudesse está aqui e terminar este trabalho.

Muito obrigado!!!

*“Se fui capaz de ver mais longe, é porque me apoiei em ombros de gigantes”*

**. Isaac Newton**

## RESUMO

Um material introdutório sobre métodos semi-analíticos é apresentado, em que a equação de Laplace é solucionada pelo método das linhas. É um texto fácil de ler, que é destinado a estudantes de graduação de física, apresentando as deduções das equações de forma clara e detalhada. Um problema de eletrostática é resolvido através de três métodos diferentes. O problema consiste em um condutor infinitamente longo, com potencial nulo nas fronteiras, exceto na fronteira superior, em que o potencial é de 1 volt. A seção retangular possui largura de  $L=3$  e altura de  $H=2$ . A equação a ser solucionada é a equação de Laplace. Em primeiro lugar, o problema foi resolvido por um método analítico, o método de separação de variáveis. Em seguida, foi usado um método semi-analítico, o método de linhas, que foi implementado de duas maneiras diferentes. Na primeira abordagem do método, a equação de Laplace é transformada em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, e na segunda abordagem a equação de Laplace é resolvida como equação diferencial parcial de segunda ordem.

**Palavras-Chave:** Método de separação de variáveis. Equação de Laplace. Método das linhas. Equações diferenciais parciais. Eletrostática.

## ABSTRACT

An introductory material on semi-analytical methods is presented, in which the Laplace equation is solved by the method of lines. It is an easy-to-read text, which is aimed at undergraduate physics students, presenting the derivations of the equations in a clear and detailed manner. An electrostatic problem is solved using three different methods. The problem consists of an infinitely long conductor with null potential in the boundaries, except in the top boundary, in which the potential is 1 volt. The rectangular section has a width of  $L = 3$  and  $M = 2$  high. The equation to be solved is the Laplace equation. First, the problem was solved by an analytical method, the separation of variables method. Then we used a semi-analytical method, the method of lines, which was implemented in two different ways. In the first approach of the method, the Laplace equation is transformed into a system of ordinary differential equations of the first order and in the second approach the Laplace equation is solved as a partial differential equation of second order.

**Key-Works:** The method of separation of variables. Laplace's equations. Method of lines. Partial differential equations. Electrostatic

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	10
CAPÍTULO 1		
2.	SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE LAPLACE.....	12
CAPÍTULO 2		
3.	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PELO MÉTODO DAS LINHAS...19	
3.1.	<i>Sistema de Equações Ordinárias de Primeira Ordem.....</i>	<i>20</i>
3.2.	<i>Equação Diferencial de Segunda Ordem.....</i>	<i>31</i>
4.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	46

## 1. INTRODUÇÃO

O *método das linhas* é um método semi-analítico de resolução de equações diferenciais parciais (PDE). Dada uma PDE com variáveis independentes  $x, y, z$ , por exemplo, poder-se-ia discretizar o problema com relação às variáveis  $x$  e  $y$ , utilizando diferenças finitas, e solucionar analiticamente com relação à variável  $z$ . Nesse caso, tem-se o método das linhas. Todavia, as discretizações em  $x$  e  $y$  também podem ser feitas utilizando transformadas de Fourier. Nesse caso, ter-se-ia o *método modal de Fourier* (FMM).

A grade do curso de licenciatura em física contempla a solução de PDE por métodos analíticos, por exemplo, resolvendo equações como a equação de Laplace, que aparecem no curso de eletromagnetismo, ou a equação de Schrödinger, estudada nos cursos de física contemporânea. Métodos numéricos também são estudados no curso de física computacional. Todavia, métodos semi-analíticos, em geral, são deixados de lado, e não são abordados durante o curso de graduação em licenciatura em física. Dessa forma, a justificativa para a realização desse trabalho encontra-se no preenchimento dessa lacuna existente nos currículos.

O objetivo geral deste trabalho é produzir um material introdutório sobre método semi-analíticos, através da solução da equação de Laplace pelo método das linhas. Pretende-se produzir um material cuja leitura seja acessível a um aluno do curso de graduação em licenciatura em física, em que as deduções de equações sejam explicadas de forma clara e detalhada.

Alguns dos objetivos específicos são: apresentar a solução da equação de Laplace, com condições de Dirichlet (não nula apenas em umas das paredes) de uma calha de forma retangular, de forma clara e detalhada, através do método de separação de variáveis; apresentar a solução da equação de Laplace (para o mesmo problema da calha) pelo método das linhas, através de um sistema de equações de primeira ordem; apresentar a solução da equação de Laplace (para o mesmo problema da calha) pelo método das linhas, diretamente através da equação de segunda ordem; desenvolver códigos em MATLAB para a simulação tanto da solução analítica quanto das soluções semi-analíticas.

A seguir é feita uma descrição resumida do trabalho. Um problema de eletrostática é resolvido através de três métodos diferentes. O problema estudado é o de uma calha retangular com potencial diferente de zero em apenas um dos lados, o lado superior, no qual o potencial é de 1 volt. A calha possui largura de  $L=3$  e altura de  $H=2$ . A equação a ser solucionada é a equação de Laplace. O primeiro método utilizado é a solução analítica via separação de variáveis. Posteriormente é utilizado um método semi-analítico, mais especificamente o método das linhas, o qual é implementado de duas maneiras diferentes. Na primeira abordagem do método, a equação de Laplace é transformada em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, e na segunda abordagem a equação de Laplace é resolvida como equação diferencial parcial de segunda ordem.

A importância dos métodos semi-analíticos está na capacidade que possuem de conciliar algumas características positivas tanto dos métodos numéricos quanto dos métodos analíticos. Os métodos numéricos possuem a capacidade de reaproveitamento dos códigos desenvolvidos para um problema em outros problemas similares, mas possuem maior custo computacional e menor precisão do que os métodos analíticos. A principal desvantagem dos métodos analíticos é a impossibilidade de adaptação dos códigos para problemas diferentes daqueles para os quais foram desenvolvidos.

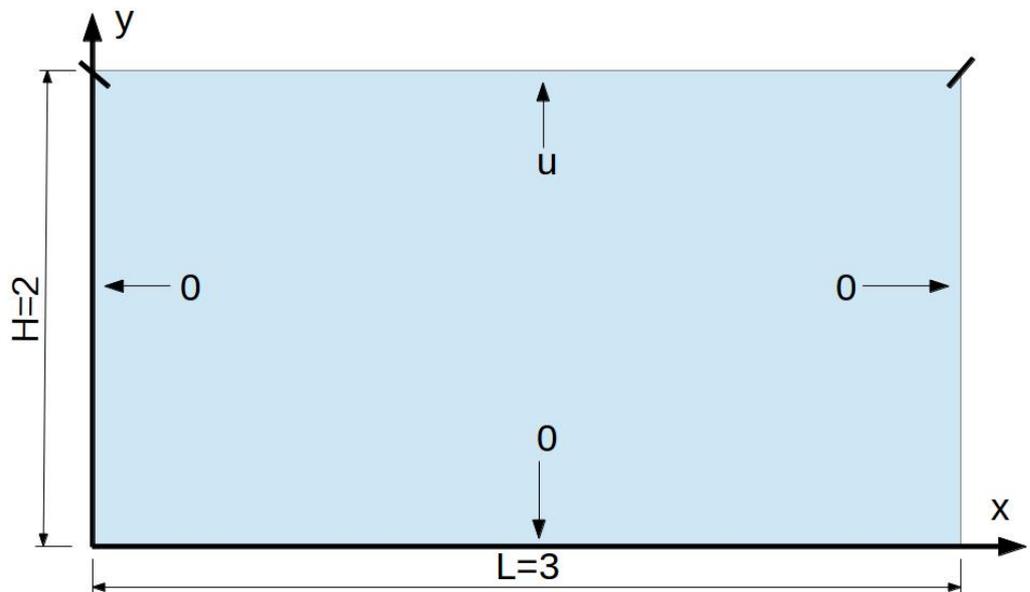
A disposição dos capítulos deste trabalho foi realizada da seguinte maneira: este primeiro capítulo trata da solução analítica da equação de Laplace em coordenada cartesiana para encontrar o potencial eletrostático de 1 volt em uma calha retangular aplicando método de separação de variáveis, o segundo capítulo trata da solução da equação de Laplace para encontrar o potencial eletrostático de 1 volt, na mesma calha, aplicando o método das linhas ( sendo este implementado de duas maneiras diferentes).

## CAPÍTULO 1

### 2. SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

Neste capítulo será apresentada a solução analítica da equação de Laplace em coordenadas cartesianas, pelo método de separação de variáveis. O problema a ser resolvido é o de uma calha de seção retangular de base  $L=3$  e altura  $H=2$ , a qual é mostrada na Figura 1.

Figura 1 - Calha de seção retangular de base  $L=3$  e altura  $H=2$ .



A equação de Laplace, dada por

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1)$$

descreve a distribuição de potencial elétrico  $V(x,y,z)$  em uma certa região, e consecutivamente, a distribuição de campo eletrostático, uma vez que este é dado por

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (2)$$

Na equação (1),  $V$  é a variável dependente e as coordenadas espaciais são as variáveis independentes. No caso bidimensional, tem-se

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

Essa equação é de segunda ordem e representa um caso particular da expressão mais geral

$$a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + d \frac{\partial V}{\partial x} + e \frac{\partial V}{\partial y} + fV = g \quad (4)$$

Quando  $b^2 - 4ac < 0$ , a equação é dita elíptica e deve ser solucionada em uma região fechada. Portanto, a equação de Laplace é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem elíptica, a qual será resolvida em uma região retangular  $0 \leq x \leq L$  e  $0 \leq y \leq H$ .

Observando a equação (1), constata-se que ela é independente do tempo, portanto, a sua solução não é um problema de valor inicial, e sim, um problema de valor de contorno. A equação (3) com um conjunto simples de condições de contorno pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 0 \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq H \\ V(0, y) = V(L, y) = V(x, 0) = 0 \quad V(x, H) &= u \end{aligned} \quad (5)$$

As condições de contorno  $V(0, y) = V(L, y) = V(x, 0) = 0$  e  $V(x, H) = u$ , em que valores são atribuídos à variável dependente nas bordas da região em que PDE é resolvida, são chamadas de condições de Dirichlet.

A solução da equação de Laplace é realizada através do método de separação de variáveis, em que a solução da PDE é representada como o produto de duas funções  $X(x)$  e  $Y(y)$ , as quais são funções somente de  $x$  e  $y$ , respectivamente. Dessa forma, a solução deve ser escrita como

$$V(x, y) = X(x)Y(y). \quad (6)$$

Ao substituir serão encontradas as soluções da PDE que podem ser escritas como o produto de  $X(x)$ , função somente de  $x$ , por  $Y(y)$ , função somente de  $y$ . A solução geral será a combinação linear de todas as possíveis soluções

Substituindo a equação (6) na equação (5), obtém-se

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 [X(x)Y(y)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [X(x)Y(y)]}{\partial y^2} = Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

Dividindo a equação (7) por  $X(x)Y(y)$  chega-se ao seguinte resultado:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \quad (8)$$

O lado esquerdo da equação (8) é função somente de  $x$ , e o lado direito dessa equação é função somente de  $y$ . Portanto, o único caso em que a igualdade expressa na equação (8) é verdadeira, ocorre quando ambos os lados são iguais a uma constante, a qual será escolhida como  $-\lambda^2$ . Dessa forma, a equação (8) dá origem as duas equações diferenciais ordinárias mostradas a seguir:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\lambda^2 \quad -\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\lambda^2 \quad (9)$$

As soluções gerais das equações diferenciais ordinárias mostradas em (9) são dadas por

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) \quad (10)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - \lambda^2 Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C \sinh(\lambda y) + D \cosh(\lambda y) \quad (11)$$

Dessa forma, substituindo (10) e (11) em (6), é obtida a solução geral, expressa como

$$V(0, y) = 0 = [A \sin(\lambda 0) + B \cos(\lambda 0)] [C \sinh(\lambda y) + D \cosh(\lambda y)] \quad (12)$$

A fim de obter as constantes A, B, C e D, é necessário utilizar as condições de contorno. A partir da substituição da condição de contorno em  $x=0$ ,  $V(0,y)=0$ , na equação (12), conclui-se que

$$V(0,y)=0=[A \sin(\lambda 0)+B \cos(\lambda 0)][C \sinh(\lambda y)+D \cosh(\lambda y)] \quad (13)$$

Como  $\sin(0)=0$  e  $\cos(0)=1$ , então, para garantir que o potencial é identicamente nulo independentemente do valor de  $y$ , a constante B deve ser nula. Portanto, a solução geral na verdade possui a forma

$$V(x,y)=[A \sin(\lambda x)][C \sinh(\lambda y)+D \cosh(\lambda y)] . \quad (14)$$

A partir da substituição da condição de contorno em  $y=0$ ,  $V(x,0)=0$ , na equação (14), conclui-se que

$$V(x,0)=0=[A \sin(\lambda x)][C \sinh(\lambda 0)+D \cosh(\lambda 0)] . \quad (15)$$

Como  $\sinh(0)=0$  e  $\cosh(0)=1$ , então, para garantir que o potencial é identicamente nulo independentemente do valor de  $x$ , a constante D deve ser nula. Portanto, a solução geral na verdade possui a forma

$$V(x,y)=[A \sin(\lambda x)][C \sinh(\lambda y)] . \quad (16)$$

A partir da substituição da condição de contorno em  $x=L$ ,  $V(L,y)=0$ , na equação (16), conclui-se que

$$V(L,y)=0=[A \sin(\lambda L)][C \sinh(\lambda y)] \quad (17)$$

A solução da equação (17) ocorre para  $\lambda L=n\pi$ , onde  $n$  é um número natural, pois, nesse caso,  $\sin(\lambda L)=\sin(n\pi)=0$ . Portanto,

$$\lambda = \frac{n\pi}{L} \quad (18)$$

A solução para um certo valor de  $n$ , é dada por

$$V_n(x,y) = \left[ A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \left[ C \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right] \quad (19)$$

A solução geral do problema de valor de contorno da equação (5) é dada pela combinação linear das soluções obtidas pela equação (19) para os diferentes valores de  $n$ . Portanto a solução geral é dada por

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n y) \quad \text{com} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad (20)$$

A condição de contorno na posição  $y=H$  é dada por  $V(x,H)=u$ , resultando em

$$V(x,H) = u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right) . \quad (21)$$

Multiplicando a equação (21) por  $e$  e integrando de 0 a  $L$ . Como o valor  $u$  é uma constante, ele pode sair da integral.

$$u \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right) \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx . \quad (22)$$

Resultando na expressão

$$\begin{aligned} u \left[ \frac{-\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{m\pi/L} \right]_0^L &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right) \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx , \\ u \left[ \frac{1 - \cos(m\pi)}{m\pi/L} \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right) \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx . \end{aligned} \quad (23)$$

Utilizando a identidade  $\sin(p)\sin(q) = [-\cos(p+q) + \cos(p-q)]/2$  na integral do lado direito da equação (23), obtém-se

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \frac{\left[-\cos\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{m\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{m\pi x}{L}\right)\right]}{2} dx ,$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{-\sin\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]_0^L}{2\left[\frac{(n+m)\pi}{L}\right]} + \frac{\sin\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right]_0^L}{2\left[\frac{(n-m)\pi}{L}\right]} .$$

Para  $m$  diferente de  $n$ , tem-se

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 . \quad (24)$$

Para  $m$  igual a  $n$ , utilizando a identidade  $\sin^2(\theta) = [1 - \cos(2\theta)]/2$ , tem-se

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right] dx = \frac{L}{2} . \quad (25)$$

As equações (24) e (25) podem ser resumidas na expressão

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \delta_{m,n} \frac{L}{2} , \quad (26)$$

onde  $\delta_{m,n}$  é o delta de Kronecker, que é igual a um quando  $m$  é igual a  $n$ , e é igual a zero quando  $m$  é diferente de  $n$ .

Substituindo (26) em (23), temos que

$$u\left[\frac{1 - \cos(m\pi)}{m\pi/L}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right) \delta_{m,n} \frac{L}{2} ,$$

$$u\left[\frac{1 - \cos(m\pi)}{m\pi}\right] = C_m \sinh\left(\frac{m\pi H}{L}\right) \frac{1}{2} ,$$

$$C_m = \frac{2u[1 - \cos(m\pi)]}{\left[m\pi \sinh\left(\frac{m\pi H}{L}\right)\right]} . \quad (27)$$

Substituindo (27) em (20) resulta em

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u[1 - \cos(n\pi)]}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n y) \quad \text{com } \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad (28)$$

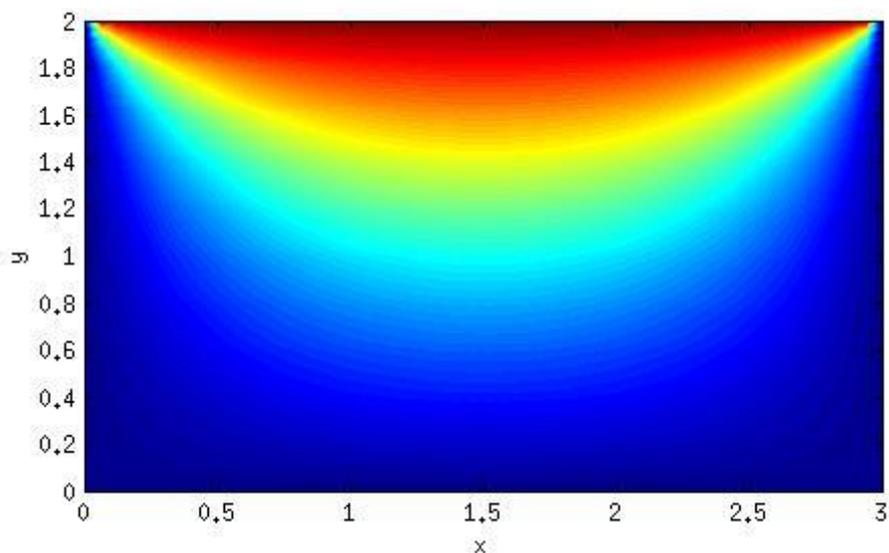
A expressão  $1 - \cos(n\pi)$  é igual a dois quando  $n$  é ímpar, e é igual a zero quando  $n$  é par. Portanto,

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4u}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad \text{com } n \text{ ímpar}$$

$$V(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4u}{(2k-1)\pi \sinh\left[\frac{(2k-1)\pi H}{L}\right]} \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{L}\right] \sinh\left[\frac{(2k-1)\pi y}{L}\right] \quad (29)$$

Utilizando o código desenvolvido, encontra-se a distribuição de potencial na seção retangular de uma calha de  $L=3$  e  $H=2$ . O valor de  $u$  é de 1 volt.

Figura 2 - Distribuição de potencial na seção retangular da calha.



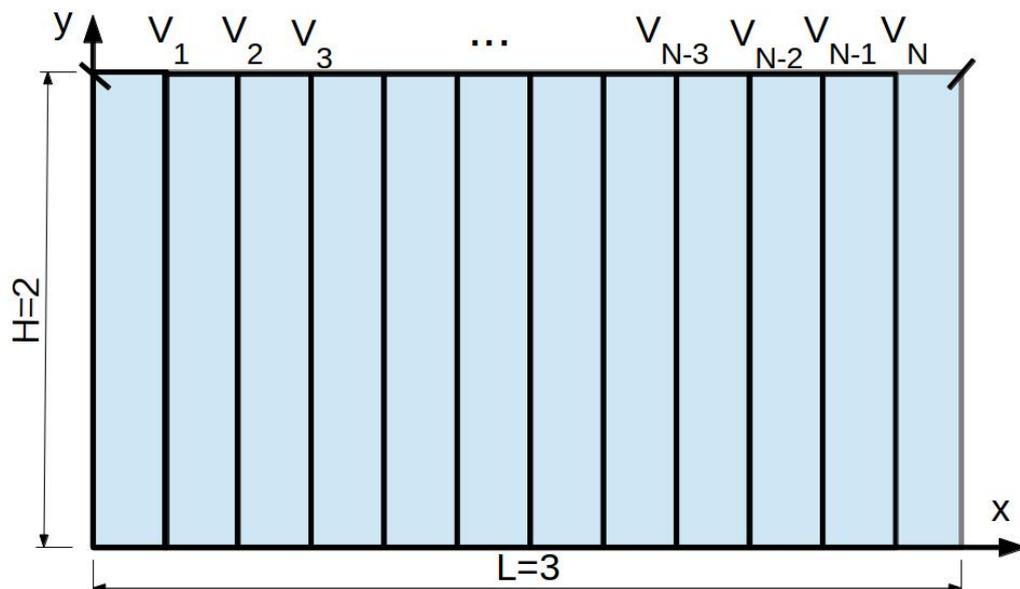
## CAPÍTULO 2

### 3. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PELO MÉTODO DE LINHAS

Neste capítulo o método das linhas é utilizado para solucionar a equação de Laplace, para a calha retangular mostrada na Figura 1. O método das linhas é um método semi-analítico em que a equação de Laplace é resolvida analiticamente em uma direção, e resolvida por diferenças finitas nas outras direções, nas quais a região de solução deve ser discretizada. No caso analisado aqui, a região de solução é resolvida analiticamente na direção  $y$  e discretizada na direção  $x$ , como pode ser visto na Figura 3.

O método das linhas será implementado de duas maneiras: primeiramente através da decomposição da PDE em um sistema de duas equações ordinárias de primeira ordem, e posteriormente pela solução da equação de segunda ordem.

Figura 3 – Discretização da região de solução no eixo  $x$ .



### 3.1 Sistema de Equações Ordinárias de Primeira Ordem

Discretizando a derivada parcial de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (30)$$

utilizando uma diferença centrada, com discretização espacial em  $x$  de passo constante  $h$ , dado por

$$h = \frac{L}{N+1} \quad (31)$$

obtem-se

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{h^2} \quad (32)$$

Na equação (32),  $V_i = V_i(y)$  ou seja,  $V_i$  é uma função de  $y$ . Os valores de  $i$  variam de 1 até  $N$ . Nas bordas em  $x=0$  e  $x=L$  são utilizadas condições de contorno de Dirichlet, portanto,  $V_0=0$  e  $V_{N+1}=0$ . Em outras palavras, a equação (32) vale para  $i$  variando de 2 a  $N-1$ , para  $i=1$ , em vez da equação (32), tem-se

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \frac{-2V_1 + V_2}{h^2} \quad (33)$$

e para  $i=N$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 V_N}{\partial x^2} = \frac{V_{N-1} - 2V_N}{h^2} \quad (34)$$

Para demonstrar que a equação (32) é verdadeira, pode-se expandir  $V_{i-1}$  e  $V_{i+1}$  em série de Taylor:

$$V_{i-1} - V_i = h \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + O(h^3), \quad (35)$$

$$V_{i+1} - V_i = h \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + O(h^3) \quad (36)$$

Somando as equações (35) e (36) e dividindo o resultado por dois, chega-se à expressão da equação (32).

Substituindo a equação (32) na equação (3), obtém-se

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} - \frac{-V_{i-1} + 2V_i - V_{i+1}}{h^2} = 0 \quad (37)$$

Como a única derivada restante é aquela com relação a  $y$ , tem-se que

$$\frac{d^2 V_i}{d y^2} - \frac{-V_{i-1} + 2V_i - V_{i+1}}{h^2} = 0 \quad (38)$$

Em termos computacionais  $V_i$  é um vetor de índice  $i$ , que no MATLAB pode ser representado como  $V(i)$ . Como apenas os índices  $i$  de 1 até  $N$  do vetor  $V$  são utilizados, pode-se utilizar os índices maiores do que  $N$  para armazenar as expressões  $h \partial V_i / \partial y$  :

$$V_{i+N} = h \frac{dV_i}{dy} \quad (39)$$

A derivada da equação (39) com relação a  $y$  resulta em

$$\frac{dV_{i+N}}{dy} = h \frac{d^2 V_i}{dy^2} \quad (40)$$

Substituindo a equação (38) na equação (40), tem-se que

$$\frac{dV_{i+N}}{dy} = \frac{-V_{i-1} + 2V_i - V_{i+1}}{h} \quad (40)$$

Variando  $i$  de 1 até  $N$  nas equações (39) e (40), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dy} &= \frac{V_{1+N}}{h} \quad \dots, \\
\frac{dV_N}{dy} &= \frac{V_{2N}}{h} \quad , \\
\frac{dV_{1+N}}{dy} &= \frac{2V_1 - V_2}{h} \quad \dots, \\
\frac{dV_{i+N}}{dy} &= \frac{-V_{i-1} + 2V_i - V_{i+1}}{h} \quad \dots, \\
\frac{dV_{2N}}{dy} &= \frac{-V_{N-1} + 2V_N}{h}
\end{aligned}$$

Estas  $2N$  equações diferenciais ordinárias acopladas podem ser escritas como uma única equação matricial:

$$\frac{d}{dy}[V_i] = A[V_i] \quad (41)$$

onde  $A$  é a matriz do sistema. Para  $N=4$ , por exemplo, a matriz  $A$  é dada por

$$A = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1/h & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/h & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/h & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/h \\
2/h & -1/h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1/h & 2/h & -1/h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1/h & 2/h & -1/h & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1/h & 2/h & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \quad (42)$$

Se os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1$  a  $\lambda_{2N}$  e os autovetores associados são  $\vec{u}_1 = [u_1^1 \ u_1^2 \ \dots \ u_1^{2N}]^T$  a  $\vec{u}_{2N} = [u_{2N}^1 \ u_{2N}^2 \ \dots \ u_{2N}^{2N}]^T$ , então

$$\lambda_i \vec{u}_i = A \vec{u}_i, \quad i=1, 2N \quad (43)$$

Para o caso mais geral,  $A = [a_{ij}]$ , com  $M=2N$ , tem-se

$$\begin{bmatrix}
a_{11}u_i^1 + \dots + a_{1M}u_i^M \\
\dots \\
a_{M1}u_i^1 + \dots + a_{MM}u_i^M
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1M} \\
\dots & \dots & \dots \\
a_{M1} & \dots & a_{MM}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
u_i^1 \\
\dots \\
u_i^M
\end{bmatrix} = A \vec{u}_i \quad (44)$$

Pode-se definir a matriz modal  $P$  como

$$P = \begin{bmatrix} u_1^1 & \dots & u_M^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^M & \dots & u_M^M \end{bmatrix} = [\bar{u}_1 \quad \dots \quad \bar{u}_M] \quad (45)$$

Dessa forma,

$$AP = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1M} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} & \dots & a_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & \dots & u_M^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^M & \dots & u_M^M \end{bmatrix},$$

$$AP = \begin{bmatrix} a_{11}u_1^1 + \dots + a_{1M}u_1^M & \dots & a_{11}u_M^1 + \dots + a_{1M}u_M^M \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{M1}u_1^1 + \dots + a_{MM}u_1^M & \dots & a_{M1}u_M^1 + \dots + a_{MM}u_M^M \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Substituindo (44) em (46), tem-se

$$AP = [A\bar{u}_1 \quad \dots \quad A\bar{u}_M] \quad (47)$$

Além disso,

$$\begin{bmatrix} u_1^1 & \dots & u_M^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^M & \dots & u_M^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1^1 & \dots & \lambda_M u_M^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 u_1^M & \dots & \lambda_M u_M^M \end{bmatrix} = [\lambda_1 \bar{u}_1 \quad \dots \quad \lambda_M \bar{u}_M] \quad (48)$$

A matriz diagonal com os autovalores é dada por

$$[\lambda_i] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_M \end{bmatrix} \quad (49)$$

Substituindo (45) e (49) em (48), tem-se

$$P[\lambda_i] = [\lambda_1 \bar{u}_1 \quad \dots \quad \lambda_M \bar{u}_M] \quad (50)$$

A partir de (43) é possível escrever

$$[\lambda_1 \vec{u}_1 \dots \lambda_{2N} \vec{u}_{2N}] = [A \vec{u}_1 \dots A \vec{u}_{2N}] \quad (51)$$

Substituindo (47) e (50) em (51) resulta em

$$P[\lambda_i] = AP \quad (52)$$

Definindo  $[V'_i]$  tal que  $[V_i] = P[V'_i]$ , e substituindo em (41), tem-se

$$\frac{d}{dy} P[V'_i] = AP[V'_i] \quad (53)$$

Como as componentes de  $P$  não dependem de  $y$  e substituindo (52) em (53), chega-se a expressão

$$P \frac{d}{dy} [V'_i] = P[\lambda_i][V'_i] \quad (54)$$

Multiplicando a equação (54) pela inversa de  $P$ , obtém-se

$$\frac{d}{dy} [V'_i] = P^{-1} P[\lambda_i][V'_i] = [\lambda_i][V'_i] \quad (55)$$

A equação matricial (55) pode ser decomposta em  $2N$  equações diferenciais ordinárias desacopladas, dadas por

$$\frac{d}{dy} V'_i = \lambda_i V'_i \quad (56)$$

A solução dessa equação é

$$V'_i = C_i \exp(\lambda_i y) \quad (57)$$

É possível agrupar as  $2N$  equações expressas pela equação (57) com  $i$  variando de 1 a  $2N$ , em uma única equação matricial, onde ambos os lados são matrizes colunas  $2N$  por 1, expressas como

$$[V'_i] = [C_i \exp(\lambda_i y)] \quad (58)$$

Multiplicando a equação (58) por  $P$ , obtém-se a expressão

$$P[V'_i] = P[C_i \exp(\lambda_i y)] \quad (59)$$

Como  $[V_i] = P[V'_i]$ , então

$$[V_i] = P[C_i \exp(\lambda_i y)] \quad (60)$$

Essa equação pode ser reescrita como

$$[V_i] = P \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp(\lambda_{2N} y) \end{bmatrix} [C_i] \quad (61)$$

Substituindo (45) em (61), tem-se

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^1 & \dots & u_{2N}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{2N} & \dots & u_{2N}^{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp(\lambda_{2N} y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_{2N} \end{bmatrix} \quad (62)$$

A equação matricial (62) dá origem a  $2N$  equações, descartando as equações de  $N+1$  a  $2N$ , e reescrevendo na forma matricial, resulta em

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^1 & \dots & u_{2N}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^N & \dots & u_{2N}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp(\lambda_{2N} y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_{2N} \end{bmatrix} \quad (63)$$

Multiplicando as duas primeiras matrizes do lado direito da equação (63), obtém-se

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^1 \exp(\lambda_1 y) & \dots & u_{2N}^1 \exp(\lambda_{2N} y) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^N \exp(\lambda_1 y) & \dots & u_{2N}^N \exp(\lambda_{2N} y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_{2N} \end{bmatrix} \quad (64)$$

A equação matricial (64) pode ser decomposta em  $N$  equações, nas quais pode-se substituir as condições de contorno em  $y=0$  e em  $y=H$ , dando origem a  $2N$  equações, as quais podem ser reagrupadas em uma equação matricial, dando origem a

$$\begin{bmatrix} V_1(0) \\ \dots \\ V_N(0) \\ V_1(H) \\ \dots \\ V_N(H) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^1 & \dots & u_{2N}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^N & \dots & u_{2N}^N \\ u_1^1 \exp(\lambda_1 H) & \dots & u_{2N}^1 \exp(\lambda_{2N} H) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^N \exp(\lambda_1 H) & \dots & u_{2N}^N \exp(\lambda_{2N} H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_{2N} \end{bmatrix} \quad (65)$$

Dessa forma, é possível obter os coeficientes  $C_1$  a  $C_{2N}$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^1 & \dots & u_{2N}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^N & \dots & u_{2N}^N \\ u_1^1 \exp(\lambda_1 H) & \dots & u_{2N}^1 \exp(\lambda_{2N} H) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^N \exp(\lambda_1 H) & \dots & u_{2N}^N \exp(\lambda_{2N} H) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1(0) \\ \dots \\ V_N(0) \\ V_1(H) \\ \dots \\ V_N(H) \end{bmatrix} \quad (66)$$

Esses coeficientes podem ser substituídos na equação (64), e finalmente são obtidos os potenciais  $V_i(y)$

A seguir é mostrado o código desenvolvido neste trabalho para implementação do método apresentado nessa seção.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%% Autor: Tiago Carvalho Martins e José Pereira da Cruz
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
clear all;
```

```
clc;
```

```
L=3.0; H=2.0; Nx=100; Ny=Nx; hx=L/(Nx+1); hy=H/(Ny+1); Vb=1.0;
```

```
for i=1:Nx
```

```
    VD(i)=0;
```

```
    VD(i+Nx)=Vb;
```

```
end
```

```
VD=VD';
```

```
A=zeros(2*Nx,2*Nx);
```

```
for i=1:Nx
```

```
    ilinha=i;
```

```
    % % % % %
```

```
    icoluna=i+Nx;
```

```
    A(ilinha,icoluna)=1.0;
```

```
    % % % % %
```

```
end
```

```
for i=1:Nx
```

```
    ilinha=i+Nx;
```

```
% % % % %
```

```
if (i~=Nx)
```

```
    icoluna=i+1;
```

```
    A(ilinha,icoluna)=-1.0;
```

```
end
```

```
% % % % %
```

```
icoluna=i;
```

```
A(ilinha,icoluna)=2.0;
```

```
% % % % %
```

```
if (i~=1)
```

```
    icoluna=i-1;
```

```
    A(ilinha,icoluna)=-1.0;
```

```
end
```

```
% % % % %
```

```
end
```

```
A=A./hx;
```

```
[u,lambda]=eig(A);
```

```
uu=[u(1:Nx,:); u(1:Nx,:)*diag(exp(H*diag(lambda)))];
```

```
c=inv(uu)*VD;
```

```
for i=1:Nx
```

```
    x=i*hx;
```

```
    for j=1:Ny
```

```
        y=j*hy;
```

```
        V(i,j)=0.0;
```

```
        for k=1:2*Nx
```

```
            V(i,j)=V(i,j)+c(k)*u(i,k)*exp(lambda(k,k)*y);
```

```
        end
```

```
    vecx(i,j)=x; vecy(i,j)=y;
```

```
    % % % % % % % % % % % %
```

```
Vana(i,j)=0.0;
```

```
for k=1:100
```

```
    Vana(i,j)=Vana(i,j)+...
```

```
    sin((2.0*k-1.0)*pi*x/L)*sinh((2.0*k-1.0)*pi*y/L)/((2.0*k-1.0)*sinh((2.0*k-1.0)*pi*H/L));
```

```
end
```

```
Vana(i,j)=4.0*Vb/pi*Vana(i,j);
```

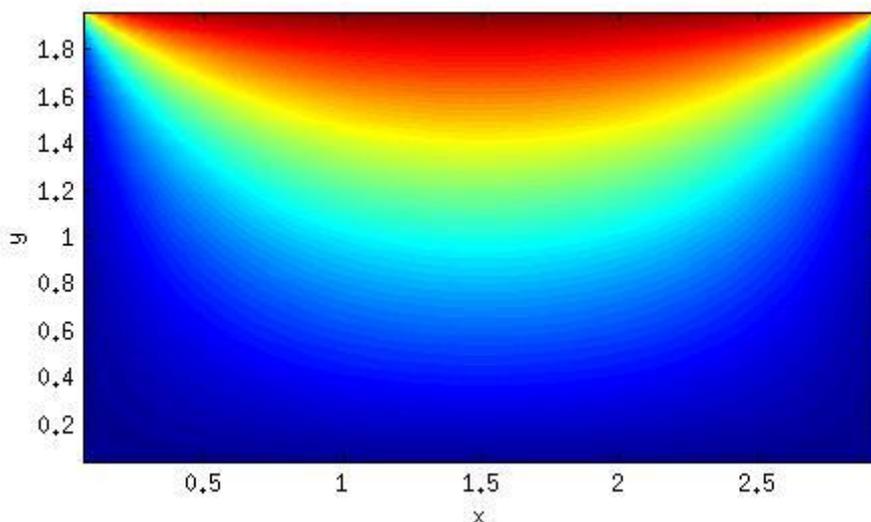
```
% % % % % % % % % % % %
```

```
end
```

```
end  
  
uplot = abs((V-Vana)./Vana)*100.0;  
  
contour(vecx,vecy,uplot);  
  
hold on;  
  
surf(vecx,vecy,uplot);  
  
colorbar;  
  
shading interp;  
  
xlabel('x');  
  
ylabel('y');  
  
hold off;
```

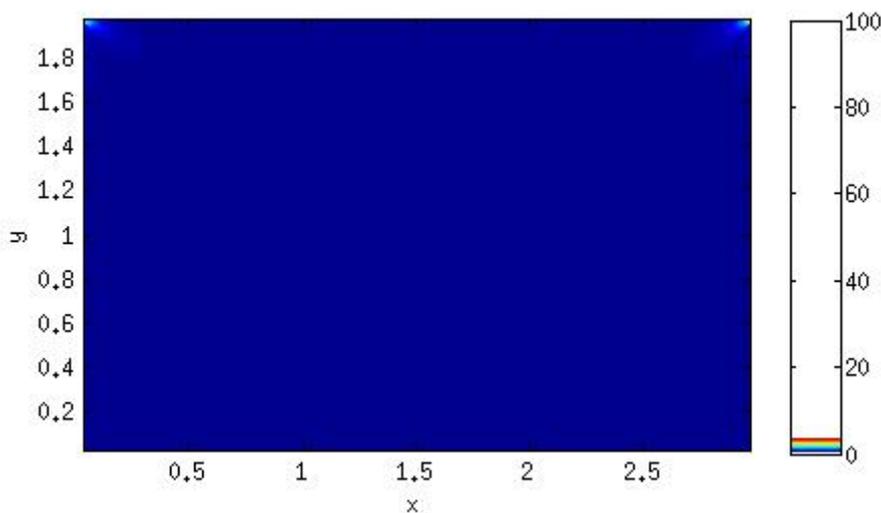
Utilizando esse código desenvolvido aqui, obteve-se a distribuição de potencial na seção retangular de uma calha de  $L=3$  e  $H=2$ , a qual é mostrada na Figura 4.

Figura 4 - Distribuição de potencial na seção retangular da calha, calculada com o método de linhas para o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.



Utilizando esse código foi obtido também o erro relativo em porcentagem para a distribuição de potencial na seção retangular da calha com relação a solução analítica, a qual é mostrada na Figura 5. Como é possível notar nessa figura, o erro máximo obtido foi de 3,5054%, nos cantos superiores, na posição dos isolamentos entre os potenciais de 1 volt no lado superior e os potenciais nulos nas laterais. A presença de descontinuidades costumam ser uma fonte de erros comum no modelamento de problemas físicos. Por outro lado, o erro médio foi de 0,0095%, corroborando a exatidão do método.

Figura 5 - Erro relativo em porcentagem para a distribuição de potencial na seção retangular da calha com relação a solução analítica. Foi considerado o cálculo com o método de linhas para o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.



### 3.2 Equação Diferencial de Segunda Ordem

Em vez de obter um sistema de equações diferenciais ordinárias, poder-se-ia obter uma equação matricial a partir da equação (38), resultando em

$$\frac{d^2}{dy^2}[V_i(y)] - \frac{1}{h^2}Q[V_i(y)] = 0 \quad (67)$$

Onde

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (68)$$

A equação (52) mostra como fazer a diagonalização de uma matriz. Por exemplo, a matriz  $Q$  pode ser diagonalizada através da expressão

$$[\lambda_i] = P^{-1}QP \quad (69)$$

onde  $P$  é a matriz modal e  $[\lambda_i]$  é a matriz que contém os autovalores. A equação (69) também pode ser escrita como

$$Q = P[\lambda_i]P^{-1} \quad (70)$$

Substituindo (70) em (67), chega-se à expressão

$$\frac{d^2}{dy^2}[V_i(y)] - \frac{1}{h^2}P[\lambda_i]P^{-1}[V_i(y)] = 0 \quad (71)$$

Multiplicando a equação (71) por  $P^{-1}$ , tem-se

$$P^{-1}\frac{d^2}{dy^2}[V_i(y)] - \frac{1}{h^2}[\lambda_i]P^{-1}[V_i(y)] = 0 \quad (72)$$

Como os autovetores independem de  $y$ , pode-se escrever

$$\frac{d^2}{dy^2}(P^{-1}[V_i(y)]) - \frac{1}{h^2}[\lambda_i]P^{-1}[V_i(y)] = 0 \quad (73)$$

Fazendo,  $[\bar{V}_i(y)] = P^{-1}[V_i(y)]$ , resulta em

$$\frac{d^2}{dy^2}[\bar{V}_i(y)] - \frac{1}{h^2}[\lambda_i][\bar{V}_i(y)] = 0 \quad (74)$$

A equação (74) é um sistema de equações diferenciais de segunda ordem desacopladas. A solução de cada uma das  $N$  ( $i$  vai de 1 a  $N$ ) equações do sistema é

$$\bar{V}_i(y) = A_i \cosh(y \sqrt{\lambda_i}/h) + B_i \sinh(y \sqrt{\lambda_i}/h) . \quad (75)$$

A equação (69) multiplicada por  $P$  dá

$$P[\lambda_i] = QP$$

portanto,

$$(Q - [\lambda_i]I)P = 0 \quad (76)$$

onde  $I$  é a matriz identidade. É preciso lembrar que o produto de uma matriz quadrada por uma matriz diagonal é comutativo.

Substituindo (45) em (76), resulta em

$$(Q - [\lambda_i]I) \begin{bmatrix} u_1^1 & \dots & u_N^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^N & \dots & u_N^N \end{bmatrix} = 0 \quad (77)$$

Os elementos obtidos como produto de cada uma das linhas da matriz  $(Q - [\lambda_i]I)$  por qualquer um dos autovetores representados pelas colunas da segunda matriz devem ser iguais aos elementos da matriz do lado direito da equação, portanto, devem ser nulos:

$$(Q - \lambda_k I) \begin{bmatrix} u_k^1 \\ \dots \\ u_k^N \end{bmatrix} = 0 \quad (78)$$

Substituindo (68) em (78), chega-se a expressão

$$-u_k^{i-1} + (2 - \lambda_k)u_k^i - u_k^{i+1} = 0 \quad (79)$$

Essa é uma equação a diferenças cuja solução é

$$u_k^i = A_k \exp(ji\phi_k) + B_k \exp(-ji\phi_k) \quad (80)$$

onde  $j$  é a unidade imaginária do conjunto dos número complexos. Trocando  $i$  por  $i-1$  em (80), resulta em

$$\begin{aligned} u_k^{i-1} &= A_k \exp[j(i-1)\phi_k] + B_k \exp[-j(i-1)\phi_k] \\ u_k^{i-1} &= A_k \exp(ji\phi_k) \exp(-j\phi_k) + B_k \exp(-ji\phi_k) \exp(j\phi_k) \\ u_k^{i-1} &= A_k \exp(ji\phi_k) [\cos(\phi_k) - j \operatorname{sen}(\phi_k)] + B_k \exp(-ji\phi_k) [\cos(\phi_k) + j \operatorname{sen}(\phi_k)] \\ u_k^{i-1} &= A_k \exp(ji\phi_k) \cos(\phi_k) - j A_k \exp(ji\phi_k) \operatorname{sen}(\phi_k) + B_k \exp(-ji\phi_k) \cos(\phi_k) \\ &\quad + j B_k \exp(-ji\phi_k) \operatorname{sen}(\phi_k) \\ u_k^{i-1} &= [A_k \exp(ji\phi_k) + B_k \exp(-ji\phi_k)] \cos(\phi_k) \\ &\quad - j [A_k \exp(ji\phi_k) - B_k \exp(-ji\phi_k)] \operatorname{sen}(\phi_k) \end{aligned} \quad (81)$$

A seu turno, trocando  $i$  por  $i+1$  em (80), resulta em

$$\begin{aligned} u_k^{i+1} &= [A_k \exp(ji\phi_k) + B_k \exp(-ji\phi_k)] \cos(\phi_k) \\ &\quad - j [-A_k \exp(ji\phi_k) + B_k \exp(-ji\phi_k)] \operatorname{sen}(\phi_k) \end{aligned} \quad (82)$$

Somando (81) e (82), e invertendo o sinal, tem-se

$$-u_k^{i-1} - u_k^{i+1} = -2[A_k \exp(ji\phi_k) + B_k \exp(-ji\phi_k)] \cos(\phi_k) \quad (83)$$

Substituindo (80) em (83), chega-se à expressão

$$-u_k^{i-1} - u_k^{i+1} = -2u_k^i \cos(\phi_k) \quad (84)$$

Substituindo (84) em (79), dá

$$\begin{aligned} -2u_k^i \cos(\phi_k) + (2 - \lambda_k)u_k^i &= 0 \\ [-2 \cos(\phi_k) + 2 - \lambda_k]u_k^i &= 0 \\ \lambda_k &= 2[1 - \cos(\phi_k)] \end{aligned} \quad (85)$$

Portanto, se  $\Phi_k$  for escolhido de modo a satisfazer a equação (85), então a equação (80) é a solução da equação a diferenças (79).

Da equação (78) conclui-se que

$$\lambda_k \begin{bmatrix} u_k^1 \\ \dots \\ u_k^N \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} u_k^1 \\ \dots \\ u_k^N \end{bmatrix} \quad (86)$$

Dado um autovalor  $\lambda_v$  diferente de  $\lambda_k$ , tem-se que  $\lambda_k \langle \vec{u}_k | \vec{u}_v \rangle$  (onde  $\langle | \rangle$  representa o produto interno) é dado por

$$\lambda_k \begin{bmatrix} u_k^1 & \dots & u_k^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_v^1 \\ \dots \\ u_v^N \end{bmatrix},$$

$$\left( \lambda_k \begin{bmatrix} u_k^1 \\ \dots \\ u_k^N \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} u_v^1 \\ \dots \\ u_v^N \end{bmatrix}, \quad (87)$$

onde T denota a operação de transposição de uma matriz. Substituindo (86) em (87), resulta em

$$\left( Q \begin{bmatrix} u_k^1 \\ \dots \\ u_k^N \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} u_v^1 \\ \dots \\ u_v^N \end{bmatrix} \quad (88)$$

A transposta de um produto matricial é o produto das transpostas das matrizes, trocando a ordem delas, ou seja

$$\begin{bmatrix} u_k^1 \\ \dots \\ u_k^N \end{bmatrix}^T Q^T \begin{bmatrix} u_v^1 \\ \dots \\ u_v^N \end{bmatrix} \quad (89)$$

Observando a equação (68), vê-se que a matriz  $Q$  é simétrica, isto é,  $Q=Q^T$ , portanto

$$\begin{bmatrix} u_k^1 \\ \dots \\ u_k^N \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} u_v^1 \\ \dots \\ u_v^N \end{bmatrix} \quad (89)$$

Trocando  $k$  por  $v$  na equação (86) e substituindo na equação (89), chega-se a

$$\begin{bmatrix} u_k^1 \\ \dots \\ u_k^N \end{bmatrix}^T \lambda_v \begin{bmatrix} u_v^1 \\ \dots \\ u_v^N \end{bmatrix}$$

$$\lambda_v \begin{bmatrix} u_k^1 \\ \dots \\ u_k^N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_v^1 \\ \dots \\ u_v^N \end{bmatrix}$$

$$\lambda_v \begin{bmatrix} u_k^1 & \dots & u_k^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_v^1 \\ \dots \\ u_v^N \end{bmatrix} \quad (90)$$

Logo,  $\lambda_k \langle \vec{u}_k | \vec{u}_v \rangle = \lambda_v \langle \vec{u}_k | \vec{u}_v \rangle$  e

$$(\lambda_k - \lambda_v) \langle \vec{u}_k | \vec{u}_v \rangle = 0 \quad (91)$$

Como os autovalores são diferentes, então

$$\langle \vec{u}_k | \vec{u}_v \rangle = \begin{bmatrix} u_k^1 & \dots & u_k^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_v^1 \\ \dots \\ u_v^N \end{bmatrix} = 0 \quad (92)$$

ou seja, os autovetores são ortogonais. Além disso, aqui é importante ressaltar que isso foi uma consequência de  $Q$  ser simétrico. A menos de um fator  $1/h^2$  presente na

equação (67), as componentes dos autovetores são potenciais, portanto, impondo a condição de Dirichlet  $u_k^0=0$  na equação (80), tem-se

$$\begin{aligned} u_k^0 &= A_k + B_k = 0 \quad , \\ B_k &= -A_k \quad . \end{aligned} \tag{93}$$

A seu turno, impondo a condição de Dirichlet  $u_k^{N+1}=0$  na equação (80), tem-se

$$\begin{aligned} u_k^{N+1} &= A_k \exp[j(N+1)\phi_k] + B_k \exp[-j(N+1)\phi_k] \quad , \\ u_k^{N+1} &= A_k \{ \exp[j(N+1)\phi_k] - \exp[-j(N+1)\phi_k] \} \quad , \\ u_k^{N+1} &= A_k \{ \cos[(N+1)\phi_k] - \cos[(N+1)\phi_k] + j \operatorname{sen}[(N+1)\phi_k] + j \operatorname{sen}[(N+1)\phi_k] \} \quad , \\ & \quad 2j \operatorname{sen}[(N+1)\phi_k] = 0 \quad , \\ & \quad \phi_k = \frac{k\pi}{N+1} \quad , \end{aligned} \tag{94}$$

onde  $k=1,2,\dots,N$ ;  $k$  deve ser diferente de zero, pois  $k=0$  na equação (85) implicaria em um autovalor igual a zero.

Para  $N \rightarrow \infty$  a equação (79) transforma-se na equação contínua

$$\frac{d^2}{dx^2} u + \lambda u = 0 \tag{95}$$

cuja solução é

$$u(x) = a \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} x) + b \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad . \tag{96}$$

Impondo a condição de Dirichlet em  $x=0$  e  $x=L$ , tem-se

$$u(0) = b = 0 \tag{97}$$

$$u(L) = a \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} L) = 0 \quad , \tag{98}$$

resultando em

$$\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{L} . \quad (99)$$

Dado um autovetor de uma matriz, seu versor também é autovetor. Como os autovetores são ortogonais, é possível torná-los ortonormais, fazendo  $\langle u^k | u^k \rangle = 1$ . Dessa forma pode-se fazer

$$\langle a \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) | a \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \rangle = 1 \quad (100)$$

Utilizando a definição de produto escalar para funções contínuas, chega-se a expressão

$$a^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2(k\pi x/L) dx = 1 \quad (101)$$

Além disso, sabe-se que

$$\begin{aligned} \cos(2k\pi x/L) &= \cos^2(k\pi x/L) - \operatorname{sen}^2(k\pi x/L) , \\ \cos(2k\pi x/L) &= [1 - \operatorname{sen}^2(k\pi x/L)] - \operatorname{sen}^2(k\pi x/L) , \\ \cos(2k\pi x/L) &= 1 - 2\operatorname{sen}^2(k\pi x/L) , \\ \operatorname{sen}^2(k\pi x/L) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2k\pi x/L) . \end{aligned} \quad (102)$$

Substituindo (102) em (101), tem-se

$$\begin{aligned} a^2 \int_0^L \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2k\pi x/L) \right] dx &= 1 , \\ a^2 \frac{L}{2} &= 1 , \\ a &= \sqrt{\frac{2}{L}} . \end{aligned} \quad (103)$$

Substituindo (99) e (103) em (96), resulta em

$$u^k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) . \quad (104)$$

Da observação da Figura 3, fica claro que  $L=(N+1)h=(N+1)$  e  $x=ih=i$ , em que  $h=1$ , como pode ser constatado pela observação da equação (79), em que o operador de diferença centrada da derivada de segunda ordem aparece com  $h=1$ . Dessa forma, a equação (104) pode ser reescrita como

$$u_i^k = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{N+1}i\right) \quad (105)$$

Os autovetores da equação (105) foram obtidos pela discretização dos autovetores para o caso contínuo, mas é necessário confirmar se eles verdadeiramente satisfazem a equação (79). Da equação (79) tem-se

$$\begin{aligned} -u_k^{i-1} + (2 - \lambda_k)u_k^i - u_k^{i+1} &= 0, \\ -\sqrt{\frac{2}{N+1}} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{N+1}(i-1)\right) + (2 - \lambda_k)\sqrt{\frac{2}{N+1}} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{N+1}i\right) - \sqrt{\frac{2}{N+1}} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{N+1}(i+1)\right) &= 0, \\ -2 \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{N+1}i\right) \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) + (2 - \lambda_k) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{N+1}i\right) &= 0, \\ -2 \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) + 2 - \lambda_k &= 0, \\ \lambda_k &= 2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right), \\ \lambda_k &= 2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right), \\ \lambda_k &= 2 \left\{ 1 - \cos^2\left[\frac{k\pi}{2(N+1)}\right] + \sin^2\left[\frac{k\pi}{2(N+1)}\right] \right\}, \\ \lambda_k &= 2 \left\{ \sin^2\left[\frac{k\pi}{2(N+1)}\right] + \sin^2\left[\frac{k\pi}{2(N+1)}\right] \right\}, \\ \lambda_k &= 4 \sin^2\left[\frac{k\pi}{2(N+1)}\right], \\ \sqrt{\lambda_k} &= 2 \sin\left[\frac{k\pi}{2(N+1)}\right]. \end{aligned} \quad (106)$$

Portanto, a equação (105) dá os autovetores com os autovalores  $\lambda_k$  mostrados na equação (106).

$$[P_{ik}] = \left[ \sqrt{\frac{2}{N+1}} \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi}{N+1} i \right) \right] \quad (107)$$

Como  $[V_i(y)] = P[\bar{V}_i(y)]$  e  $\bar{V}_i(y) = A_i \cosh(y \sqrt{\lambda_i}/h) + B_i \sinh(y \sqrt{\lambda_i}/h)$ , então

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdot & \cdot & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \cdot & \cdot & P_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdot & \cdot & P_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \cosh(y \sqrt{\lambda_1}/h) + B_1 \sinh(y \sqrt{\lambda_1}/h) \\ A_2 \cosh(y \sqrt{\lambda_2}/h) + B_2 \sinh(y \sqrt{\lambda_2}/h) \\ \cdot \\ \cdot \\ A_N \cosh(y \sqrt{\lambda_N}/h) + B_N \sinh(y \sqrt{\lambda_N}/h) \end{bmatrix} \quad (108)$$

Impondo a condição de Dirichlet  $V(x,y=0)=0$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdot & \cdot & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \cdot & \cdot & P_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdot & \cdot & P_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_N \end{bmatrix} \quad (109)$$

De (109) conclui-se que  $A_i=0$ . Impondo a condição de Dirichlet  $V(x,y=H)=1$ , chega-se a

$$\begin{bmatrix} B_1 \sinh(H \sqrt{\lambda_1}/h) \\ B_2 \sinh(H \sqrt{\lambda_2}/h) \\ \cdot \\ \cdot \\ B_N \sinh(H \sqrt{\lambda_N}/h) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \quad (110)$$

Dessa forma, da equação (108), com as condições de contorno, conclui-se que o potencial  $V_i(y)$  é dado por

$$V_i(y) = \sum_{k=1}^N P_{ik} B_k \sinh(\sqrt{\lambda_k} y/h). \quad (111)$$

A seguir é mostrado o código para implementação do método apresentado nessa seção, o qual foi adaptado a partir do programa disponível em [https://jp.mathworks.com/matlabcentral/answers/uploaded\\_files/42080/370282.pdf](https://jp.mathworks.com/matlabcentral/answers/uploaded_files/42080/370282.pdf).

**% Adaptado de**

**%**

**[https://jp.mathworks.com/matlabcentral/answers/uploaded\\_files/42080/3702](https://jp.mathworks.com/matlabcentral/answers/uploaded_files/42080/370282.pdf)**

**82.**

**pdf**

**clear all;**

**clc;**

**L=3;**

**H=2;**

**N=100;**

**% passo espacial**

**h=L/(N+1);**

**% raiz quadrada do autovalor**

**SQRTLAM=2\*sin((1:N)\*pi\*0.5/(N+1));**

**% matriz modal**

**for i=1:N**

**for k=1:N**

```
P(i,k)=sqrt(2/(N+1))*sin(i*k*pi/(N+1));
```

```
end
```

```
end
```

```
% cálculo dos coeficientes através das condições de fronteira
```

```
VH=1.0;
```

```
vecVH=VH*ones(N,1);
```

```
B=(inv(P)*vecVH)./sinh(H*SQRTLAM/h)';
```

```
% calcula V para pontos dados
```

```
V=zeros(N,N);
```

```
for l=1:N
```

```
    for J=1:N
```

```
        X(l,J)=l*h;
```

```
        Y(l,J)=J*h*H/L;
```

```
        V(l,J)=0.0;
```

```
        for K=1:N
```

```
            V(l,J)=V(l,J)+P(l,K)*B(K)*sinh(SQRTLAM(K)*Y(l,J)/h);
```

```
        end
```

```
    Vana(l,J)=0.0;
```

```
    for k=1:50
```

```
        Vana(l,J)=Vana(l,J)+...
```

```

sin((2.0*k-1.0)*pi*X(I,J)/L)*sinh((2.0*k-1.0)*pi*Y(I,J)/L)/...
((2.0*k-1.0)*sinh((2.0*k-1.0)*pi*H/L));

end

Vana(I,J)=4.0*VH/pi*Vana(I,J);

end

end

uplot = abs((V-Vana)./Vana)*100.0;

contour(X,Y,uplot);

hold on;

surf(X,Y,uplot);

barra = colorbar;

set(barra, 'ylim', [0 100]);

shading interp;

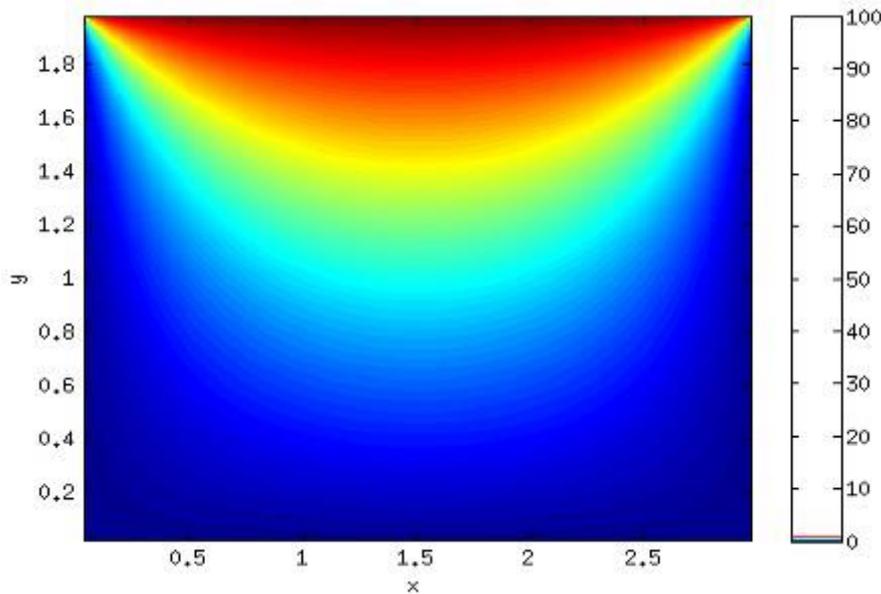
xlabel('x');

ylabel('y');

hold off;

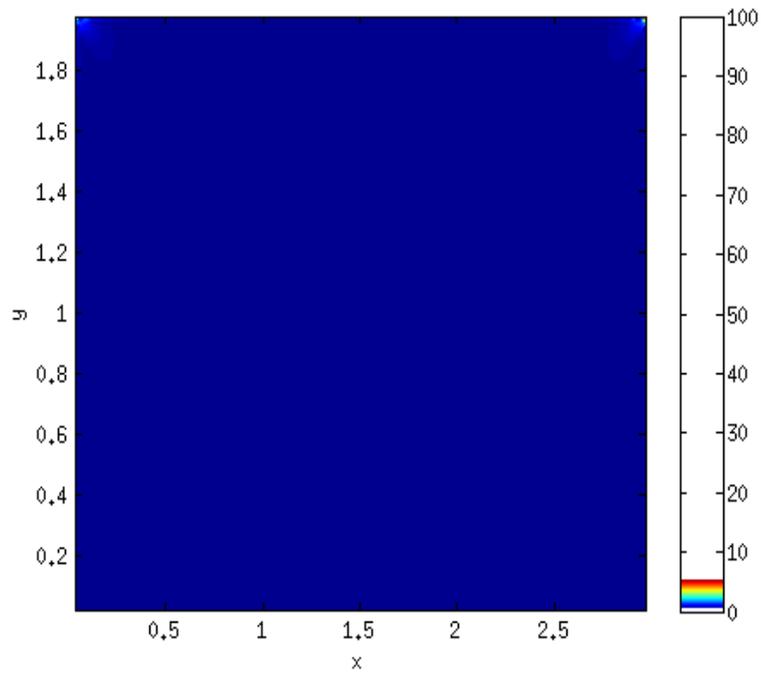
```

Figura 6 - Distribuição de potencial na seção retangular da calha, calculada com o método de linhas para uma equação diferencial ordinária.



Utilizando esse código, obteve-se a distribuição de potencial na seção retangular de uma calha de  $L=3$  e  $H=2$ , a qual é mostrada na Figura 6. Além disso, foi obtido também o erro relativo em porcentagem para a distribuição de potencial na seção retangular da calha com relação a solução analítica, a qual é mostrada na Figura 7. Como é possível notar nessa figura, o erro máximo obtido foi de 5,6383%, nos cantos superiores, na posição dos isolamentos entre os potenciais de 1 volt no lado superior e os potenciais nulos nas laterais. A presença de discontinuidades costumam ser uma fonte de erros comum no modelamento de problemas físicos. Por outro lado, o erro médio foi de 0,011%, corroborando a exatidão do método.

Figura 7 - Erro relativo em porcentagem para a distribuição de potencial na seção retangular da calha com relação a solução analítica. O cálculo foi realizado através da solução da equação de segunda ordem pelo método das linhas.



#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi desenvolvido um material introdutório sobre métodos semi-analíticos, em que a equação de Laplace é solucionada pelo método das linhas. O texto é voltado para estudantes de graduação em física, e aborda tanto o método das linhas quanto a solução analítica através do método de separação de variáveis, apresentando as deduções das equações de forma clara e detalhada.

Um problema de eletrostática foi resolvido através de três métodos diferentes. O problema consistiu em um condutor infinitamente longo, com potencial nulo nas fronteiras, exceto na fronteira superior, em que o potencial é de 1 volt. A seção retangular possui largura de  $L=3$  e altura de  $H=2$ . A equação a ser solucionada é a equação de Laplace. Em primeiro lugar, o problema foi resolvido por um método analítico, o método de separação de variáveis. Em seguida, foi usado um método semi-analítico, o método de linhas, que foi implementado de duas maneiras diferentes. Na primeira abordagem do método, a equação de Laplace foi transformada em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, e na segunda abordagem a equação de Laplace foi resolvida como equação diferencial parcial de segunda ordem.

Os algoritmos foram implementados em códigos em MATLAB. O erro máximo obtido para o método das linhas implementado com base no sistema de equações diferenciais de primeira ordem foi de 3,5054%, e para o método das linhas implementado com base na solução da equação de segunda ordem foi de 5,6383%. O erro médio obtido para o método das linhas implementado com base no sistema de equações diferenciais de primeira ordem foi de 0,0095%, e para o método das linhas implementado com base na solução da equação de segunda ordem foi de 0,011%. Dessa forma, conclui-se que o método das linhas fornece resultados com boa exatidão, e que o método baseado na solução do sistema de equações diferenciais produz um erro menor.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1] R. Pregla, *Analysis of Electromagnetic Fields and Waves: The Method of Lines*. John Wiley & Sons, 2008.

[2] G.V. Patel, K.B. Patel, "THE METHOD OF LINES FOR SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATION ". *ANNALS of Faculty Engineering Hunedoara - International Journal of Engineering* , 2016.

[3][https://jp.mathworks.com/matlabcentral/answers/uploaded\\_files/42080/370282.pdf](https://jp.mathworks.com/matlabcentral/answers/uploaded_files/42080/370282.pdf)

[4] M.N.O. Sadiku, *Elements of Electromagnetics*. New York: Oxford Univ. Press, 1994.