

UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ  
INSTITUTO DE ENGENHARIA DO ARAGUAIA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS

SARA BLENDIA DA SILVA CORREIA

**CONSTRUÇÃO DINÂMICA DE FRACTAIS DO TIPO REMOÇÃO USANDO O  
GEOGEBRA**

SANTANA DO ARAGUAIA

2023

SARA BLENDA DA SILVA CORREIA

**CONSTRUÇÃO DINÂMICA DE FRACTAIS DO TIPO REMOÇÃO USANDO O  
GEOGEBRA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas do Instituto de Engenharia do Araguaia da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, como requisito para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cecilia Orellana Castro.

SANTANA DO ARAGUAIA

2023

SARA BLENDA DA SILVA CORREIA

**CONSTRUÇÃO DINÂMICA DE FRACTAIS DO TIPO REMOÇÃO USANDO O  
GEOGEBRA**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Ciências Exatas do Instituto de Engenharia do Araguaia da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, como requisito para obtenção do grau de Licenciada Licenciatura em Matemática.

Data de aprovação: Santana do Araguaia (PA), 10 de abril de 2023.

Banca Examinadora:

*Cecilia Orellana Castro*

---

Profa. Dra. Cecilia Orellana Castro  
IEA - Unifesspa  
Orientadora

*Rodriguez*

---

Prof. Dr. Manolo Rodriguez Heredia  
FCE - IEA - Unifesspa  
Examinador Interno

*Luis Ismael Asmat Lopez*

---

Prof. Dr. Luis Ismael Asmat Lopez  
FCE - IEA - Unifesspa  
Examinador Interno

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará**  
**Biblioteca Setorial Campus do Instituto de Engenharia do Araguaia**

---

C824c Correia, Sara Blenda da Silva  
Construção dinâmica de fractais do tipo remoção usando o  
GeoGebra/ Sara Blenda da Silva Correia. — 2023.  
70 f.: il. color.

Orientador (a): Cecília Orellana Castro.  
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -  
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Instituto de  
Engenharia do Araguaia, Faculdade de Ciências Exatas, Curso  
de Licenciatura em Matemática, Santana do Araguaia, 2023.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Fractais – Programas  
de computador. 3. GeoGebra (Software). 4. Análise matemática.  
5. Tecnologia Educacional. I. Castro, Cecília Orellana, orient. II.  
Título.

CDD: 22. ed.: 510.7

---

Elaborado por Lisnéa de Oliveira Gomes – CRB-2/1684

## DEDICATÓRIA

*Este trabalho é dedicado aos meus pais, pois foram incentivadores para que hoje pudesse concluir a minha graduação.*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus por me proporcionar confiança para enfrentar cada percurso dessa jornada, e força nos momentos de dificuldades. Por mais que caminho seja longo, Deus sempre está presente. Aos meus pais, Diana Pereira e Ludio Dias, que não meditaram esforço para me apoiar nessa trajetória. A eles a minha imensa gratidão, porquanto, foram o meu alicerce e exemplo de humildade e persistência.

Aos meus irmãos, Samira Dourado, Weliã Correia e ao meu cunhado, Gabriel Dourado, que foram meus incentivadores para realização dessa etapa na minha vida.

Aos meus professores, que com seu imenso conhecimento, compartilharam de maneira compressível e acessível para conseguirmos entender cada propriedades empregada nas disciplinas e assim aprofundar nosso conhecimento.

A minha gratidão, a minha orientadora, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cecilia Orellana Castro, pela compreensão e paciência no decorrer da construção dessa pesquisa, que esteve participando ativamente, ajudando-me no desenvolvimento de cada passo necessário e também compartilhado suas experiências, e dizendo a direção que precisava ser percorrida.

Por fim a minha gratidão, a minha família e aos meus amigos da turma 2018 do Curso de Licenciatura em Matemática do instituto de Engenharia do Araguaia, que ao longo desse percurso estiveram presentes, e a todos de maneira geral que participaram de alguma forma dessa conquista. Meu muito obrigada!

*“Tudo o que fizerem, seja em palavra, seja em ação,  
façam-no em nome do Senhor Jesus,  
dando por meio dele graças a Deus Pai.  
(Bíblia Sagrada, Colossenses 3, 17)*

## RESUMO

O presente trabalho visa desenvolver um manual de construções de fractais do tipo Remoção, destacando os comandos utilizados no software GeoGebra com o objetivo de compreender como a Matemática e a Tecnologia se combinam na construção desses fractais em forma de arte dinâmica. Os fractais desenvolvidos nessa pesquisa são: Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Esponja de Menger e Tetraedro de Sierpinski. A metodologia é de carácter Exploratório, pois busca investigar e difundir as principais características e fenômenos surgidos durante a criação de fractais do tipo Remoção usando o software GeoGebra. Os resultados obtidos nessa pesquisa apontam que é possível combinar a Matemática com uma ferramenta tecnológica para ensino da Geometria Fractal, ampliando o interesse dos estudantes pelas aplicações da Álgebra Linear. Conclui-se que a construção de fractais com o auxílio de ferramentas tecnológicas permite exibir a beleza da matemática sem deixar de lado o rigor de seus conceitos e propriedades.

**Palavras-chave:** Fractais do tipo Remoção; Ferramentas tecnológicas; Aplicações da Álgebra Linear.

## ABSTRACT

The present final paper aims to develop a manual for constructions of fractals of the type self-similar, highlighting the commands used in the GeoGebra software to understand how Mathematics and Technology are combined in the construction of these fractals in shape of dynamic art. The fractals developed in this research are: Cantor set, Sierpinski triangle, Sierpinski rug, Menger sponge and Sierpinski tetrahedron. The methodology used is exploratory in nature, as it seeks to investigate and disseminate the main characteristics and phenomena arisen during the creation of this type of fractals using GeoGebra software. The results obtained in this investigation indicate that it is possible combine Mathematics with a technological tool for teaching Geometry Fractal, increasing students' interest in the applications of Linear Algebra. We conclude that the construction of fractals with the help of technological tools allows show the beauty of mathematics without neglecting the rigor of its concepts and properties.

**Keywords:** Fractals of the type self-similar; Technological tools; Linear algebra applications.

## RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo desarrollar un manual para construcciones de fractales del tipo Remoción, destacando los comandos utilizados en el software GeoGebra para comprender cómo se combinan las Matemáticas y la Tecnología en la construcción de estos fractales en forma de arte dinámico. Los fractales desarrollados en esta investigación son: Conjunto de Cantor, Triángulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Esponja de Menger y Tetraedro de Sierpinski. La metodología usada es de carácter exploratorio, pues busca indagar y difundir las principales características y fenómenos surgidas durante la creación de este tipo de fractales utilizando el software GeoGebra. Los resultados obtenidos en esta investigación indican que es posible combinar las Matemáticas con una herramienta tecnológica para la enseñanza de la Geometría Fractal, aumentando el interés de los estudiantes por las aplicaciones del Álgebra Lineal. Se concluye que la construcción de fractales con la ayuda de herramientas tecnológicas permite mostrar la belleza de las matemáticas sin descuidar el rigor de sus conceptos y propiedades.

**Palabras-clave:** Fractales del tipo Remoción; Herramientas tecnológicas; Aplicaciones del Álgebra Lineal.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	A união dos oitos conjuntos semelhantes . . . . .	16
2	$S = S_1 \cup S_2$ . . . . .	16
3	$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ . . . . .	16
4	$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_8$ . . . . .	17
5	Conjunto Unitário $U$ . . . . .	17
6	Conjunto $U$ . . . . .	18
7	8 Semelhanças de $U$ . . . . .	19
8	Conjunto $S$ . . . . .	19
9	As primeiras três etapas da construção do Conjunto do Cantor . . . . .	23
10	Etapa inicial: Triângulo de Sierpinski . . . . .	24
11	Etapa 1: Triângulo de Sierpinski . . . . .	24
12	Etapa 2: Triângulo de Sierpinski . . . . .	25
13	Etapa 3: Triângulo de Sierpinski . . . . .	25
14	Etapa 4: Triângulo de Sierpinski . . . . .	26
15	Etapa inicial: Tetraedro de Sierpinski . . . . .	26
16	Etapa 1: Tetraedro de Sierpinski . . . . .	27
17	Etapa 2: Tetraedro de Sierpinski . . . . .	27
18	Etapa 3: Tetraedro de Sierpinski . . . . .	28
19	Etapa Inicial: Tapete de Sierpinski . . . . .	28
20	Etapa 1: Tapete de Sierpinski . . . . .	29
21	Etapa 2: Tapete de Sierpinski . . . . .	29
22	Etapa 3: Tapete de Sierpinski . . . . .	30
23	Etapa Inicial: Esponja de Menger . . . . .	30
24	Etapa 1: Esponja de Menger . . . . .	31
25	Etapa 2: Esponja de Menger . . . . .	31
26	Tela inicial do Geogebra . . . . .	32
27	Janela de Visualização . . . . .	32
28	Janela de Álgebra . . . . .	33
29	Janela de Visualização 3D . . . . .	33
30	Campo de Entrada . . . . .	34
31	Polígono Regular . . . . .	34
32	Barra de Ferramentas do Geogebra . . . . .	35
33	Comando Controle Deslizante . . . . .	35
34	Comando Sequência do Geogebra . . . . .	36
35	Comando Transladar do Geogebra . . . . .	36
36	Exemplo de Aplicação do Comando Homotetia . . . . .	36
37	Comando Homotetia . . . . .	37
38	Construções iniciais do Conjunto de Cantor . . . . .	39

39	Comandos utilizados na construção do Conjunto de Cantor . . . . .	40
40	Etapa 1: Resultado de aplicar a sequência $C1$ . . . . .	41
41	Etapa 2: Resultado de aplicar a sequência $C2$ . . . . .	42
42	Etapa 3: Resultado de aplicar a sequência $C3$ . . . . .	43
43	Etapa 4: Resultado de aplicar a sequência $C4$ . . . . .	44
44	Etapa 5: Resultado de aplicar a sequência $C5$ . . . . .	45
45	Etapa 5: Gráfico resultante da redução da espessura de $C5$ . . . . .	46
46	Construções iniciais do Triângulo de Sierpinski . . . . .	47
47	Comandos utilizados na construção do triângulo de Sierpinski . . . . .	48
48	Etapa 1: Resultado de aplicar a sequência $I1$ . . . . .	49
49	Etapa 2: Resultado de aplicar a sequência $I2$ . . . . .	50
50	Etapa 3: Resultado de aplicar a sequência $I3$ . . . . .	51
51	Etapa 4: Resultado de aplicar a sequência $I4$ . . . . .	52
52	Etapa 5: Resultado de aplicar a sequência $I5$ . . . . .	53
53	Etapa 6: Resultado de aplicar a sequência $I6$ . . . . .	54
54	Construções iniciais do Tetraedro de Sierpinski . . . . .	55
55	Comandos utilizados na construção do Tetraedro de Sierpinski . . . . .	56
56	Etapa 1: Resultado de aplicar a sequência $P1$ . . . . .	57
57	Etapa 2: Resultado de aplicar a sequência $P2$ . . . . .	57
58	Etapa 3: Resultado de aplicar a sequência $P3$ . . . . .	58
59	Construções iniciais do Tapete de Sierpinski . . . . .	59
60	Comandos utilizados na construção do Tapete de Sierpinski . . . . .	60
61	Etapa 1: Resultado de aplicar a sequência $t1$ . . . . .	61
62	Etapa 2: Resultado de aplicar a sequência $t2$ . . . . .	62
63	Etapa 3: Resultado de aplicar a sequência $t3$ . . . . .	63
64	Etapa 4: Resultado de aplicar a sequência $t4$ . . . . .	64
65	Construções iniciais da Esponja de Menger . . . . .	65
66	Comandos utilizados na construção da Esponja de Menger . . . . .	67
67	Etapa 1: Resultado de aplicar a sequência $E1$ . . . . .	68
68	Etapa 2: Resultado de aplicar a sequência $E2$ . . . . .	68

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>15</b>
2.1	Preliminares matemáticos	15
2.2	Algoritmos para gerar fractais	19
2.3	Geometria Fractal	20
2.3.1	Conjunto de Cantor	22
2.3.2	Triângulo de Sierpinski	23
2.3.3	Pirâmide ou Tetraedro de Sierpinski	26
2.3.4	Tapete de Sierpinski	28
2.3.5	Esponja de Menger	30
2.4	Comandos do GeoGebra utilizados na construção de Fractais	31
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>38</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>39</b>
4.1	Conjunto de Cantor	39
4.2	Triângulo de Sierpinski	47
4.3	Pirâmide ou Tetraedro de Sierpinski	55
4.4	Tapete de Sierpinski	59
4.5	Esponja de Menger	65
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>70</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>71</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os fractais surgiram por meio de indagações sobre diversos tipos de construções de formas geométricas, pois se observou que nestas figuras, criava-se um efeito de reflexo de espelho em que cada conjunto do objeto era semelhante, tornando-se uma autosimilaridade. O matemático Benoit Mandelbrot denominou esses objetos como Fractais ou Geometria Fractal, cujo significado referia-se a quebrar: fragmentação ou irregularidades (BARBOSA, 2016).

Benoit Mandelbrot percebeu que um problema de ruídos nas linhas telefônicas empregadas em rede de computadores podia ser resolvido usando uma aplicação do trabalho de Georg Cantor conhecido como Conjunto de Cantor, um dos fractais mais simples que existe na atualidade. Isso viabilizou a oportunidade do surgimento de descobertas que mereceram ser exploradas, demonstrando não apenas a beleza desses objetos senão também as suas aplicações na realidade (BARBOSA, 2016).

O fractal é uma réplica de si mesmo, em que ampliação do sistema reproduz uma cópia inicial igual ao objeto, independentemente do desenvolvimento do desenho, de maneira nenhuma fornecerá um resultado final, isto é, consegue-se ampliar o fractal de maneira contínua e ilimitada. Em (MANDELBROT, 1998, p. 207), estabelece a Geometria Fractal da seguinte maneira: "é o estudo de diversos objetos, tanto matemáticos como naturais, que não são regulares, mas rugosos, porosos, ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau e em todas as escalas".

Com a evolução dos recursos tecnológicos, estes podem ser utilizados para estimular a criatividade ao visualizar as propriedades geométricas dos fractais. Do mesmo modo, a construção do conhecimento matemático pode acontecer quando vivenciamos situações que nos permitem analisar as condições necessárias para resolver desafios, (MOREIRA, 1996). Ao pensarmos no procedimento que se combina a tecnologia com a construção de fractais do tipo Remoção, é que percebemos que esta pesquisa é uma aplicação da matemática destinada a criar arte dinâmica e sua representação no plano e no espaço euclidiano. Procuramos responder aos questionamentos de como a matemática e a informática se combinam na construção de fractais, principalmente do tipo Remoção, descrevendo de maneira clara e sucinta, as propriedades matemáticas presentes no processo de formação.

Partindo desta questão foi elaborado o objetivo geral da pesquisa que é "Compreender como a Matemática e a Tecnologia se combinam na construção de Fractais do tipo Remoção em forma de arte dinâmica, analisando a viabilidade no ensino e aprendizagem da geometria fractal por meio de construções que impressionam por sua forma e estrutura, exibindo assim, a importância da matemática em aplicações da realidade".

Os fractais do tipo Remoção que serão abordados neste trabalho são: Conjunto do Cantor, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Esponja de Menger e Pirâmide de Sierpinski. Será apresentado um estudo teórico dos fractais do tipo Remoção e uma descrição individual dos fractais estudados, destacando suas principais características e exemplos mais notáveis de

aplicações na realidade. Posteriormente, com o uso dessa ferramenta serão representados de maneira dinâmica, indicando em cada passo da construção todos os conceitos matemáticos envolvidos e como estes estão relacionados com os diversos comandos do GeoGebra.

Conforme a análise dos dados de trabalhos envolvendo a temática "Fractais" e o "Software GeoGebra" dessa análise poderemos representar figuras com bases em conceitos sólidos da matemática, utilizando como ferramenta o software para gerar e reproduzir imagens por meio de comandos. Possibilitando a compreensão das características fundamentais da figura a ser construída, proporcionando novas descobertas matemáticas por meio da aplicação de propriedades dos fractais com a combinação de uma ferramenta tecnológica.

Desse modo, procuramos estabelecer uma ferramenta que proporcionar-se ao usuário uma experiência sobre as construções de figuras da Geometria Fractal. O objeto escolhido foi o software GeoGebra que apresenta recursos importantes e de fácil manuseio para o desenvolvimento de exemplos matemáticos dinâmicos. Dessa maneira, podemos exercer comandos como: *Lista*, *Sequência*, *Girar*, *Homotetia*, *Deslizador*, entre outros, que descrevem auto-similaridade para réplica em uma escala menor de um objeto dado.

Além disso, a geometria fractal pode ser muito importante para o desenvolvimento de novas metodologias e práticas que abordam situações novas em que o educando possa fazer a ligação daquilo que está sendo estudado com os acontecimentos ao nosso redor. Entre eles, conceitos de simetria relacionado com a geometria fractal, demonstrando a quantidade de detalhes empregados nas imagens para melhorar os aspectos da aprendizagem. Além disso, segundo (MORAN, 2007)

"as tecnologias são pontes que abrem a sala de aula para o mundo, que representam, medeiam o nosso conhecimento do mundo. São diferentes formas de representação da realidade, de forma mais abstrata ou concreta, mais estática ou dinâmica, mais linear ou paralela, mas todas elas, combinadas, integradas, possibilitam uma melhor apreensão da realidade e o desenvolvimento de todas as potencialidades do educando, dos diferentes tipos de inteligência, habilidades e atitudes" (MORAN, 2007, p.164).

Numa pesquisa no Google Acadêmico, com os termos "Fractais do tipo Remoção" e "GeoGebra", encontramos bastantes trabalhos de uso de fractais em propostas de atividades didáticas para o ensino de conceitos matemáticos no ensino médio. No entanto, existem poucos materiais que mostram o passo a passo do "processo de construção". Os trabalhos desenvolvidos no software ficarão disponibilizados na plataforma GeoGebraTube para contribuir na formação dos estudantes de matemática e áreas afins que são usuários dessa rede social acadêmica.

Esse trabalho divide-se em cinco seções, sendo a primeira delas: a Introdução, onde se apresenta a justificativa, problema de pesquisa e objetivo geral. A segunda seção é denominada Fundamentação Teórica, onde se apresenta uma breve revisão histórica de cada fractal do tipo Remoção e as propriedades relacionadas com a sua construção. Também há uma descrição da

ferramenta tecnológica escolhida para esse trabalho. Na terceira seção se apresenta a metodologia escolhida para desenvolver essa pesquisa, sendo uma pesquisa de carácter exploratória que buscar investigar as características presentes nos fractais do Tipo Remoção. A quarta seção é denominada Resultados e Discussões, que apresenta o passo a passo da construção de cada um dos fractais propostos nessa trabalho, descrevendo os comandos utilizados no decorrer da construção e fazendo comentários sobre as descobertas ou dificuldades encontradas. A última seção é denominada Conclusões e Trabalhos Futuros, que apresenta uma análise geral do procedimento usado na pesquisa desenvolvida, e os resultados obtidos no decorrer do trabalho que contribuíram para entendermos que os recursos tecnológicos podem ser usados com ferramenta de ensino de Matemática e também as recomendações para uma provável continuação.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nessa seção apresentaremos a definição da Geometria fractal, também cada um dos fractais do tipo Remoção, descrevendo sua origem e o passo a passo da construção. Para isso, detalharemos os algoritmos importantes para a elaboração.

### 2.1 Preliminares matemáticos

Para o começo desse estudo, necessitamos apresentar alguns aspectos sobre terminologia relativa a conjuntos em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 2.1.1.** Um conjunto em  $\mathbb{R}^2$  é dito **limitado** se estiver contido em algum círculo de raio finito.

**Definição 2.1.2.** Um conjunto é dito ser **fechado** se ele contém todos os seus pontos de limite. Um ponto de limite é um ponto para o qual existem pontos no conjunto arbitrariamente próximos a ele.

Os tipos de fractais que reconhecemos primeiramente são autossimilares. Geralmente, determinamos um conjunto autossimilar em  $\mathbb{R}^2$  pela seguinte **Definição 2.2.3**.

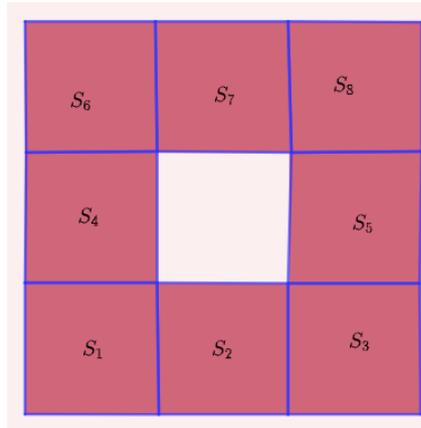
**Definição 2.1.3.** Um conjunto fechado e limitado do plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$  é dito **autossimilar** se puder ser descrito da forma:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_k,$$

em que  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$  são conjuntos não sobrepostos ou com intersecção vazia, cada um dos quais é congruente à contração de  $S$  de mesmo fator  $s$ , sendo  $0 < s < 1$ .

*Exemplo 2.1.1.* Considere o Tapete de Sierpinski que demonstra a união de oito conjuntos semelhantes e não sobrepostos formado, assim, a contração de  $S$ , como mostra na figura abaixo.

**Figura 1** – A união dos oitos conjuntos semelhantes



**Fonte:** Autores, 2022

A seguir alguns exemplos baseados em (ANTON; RORRES, 2001).

*Exemplo 2.1.2.* O segmento  $S$  de reta em  $\mathbb{R}^2$  pode ser caracterizado como a união de dois segmentos de reta congruentes e não sobrepostos,  $S_1$  e  $S_2$ . Esse segmento apresenta um conjunto autossimilar com  $k = 2$  e  $s = \frac{1}{2}$ , como mostra na figura a seguir.

**Figura 2** –  $S = S_1 \cup S_2$



**Fonte:** Autores, 2022

*Exemplo 2.1.3.* O quadrado  $S$  pode ser representado como combinação de quatro quadrados congruentes e não sobrepostos  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$ . Desta maneira, esse quadrado expressa um conjunto autossimilar com  $k = 4$  e  $s = \frac{1}{2}$ , como mostra na figura a seguir.

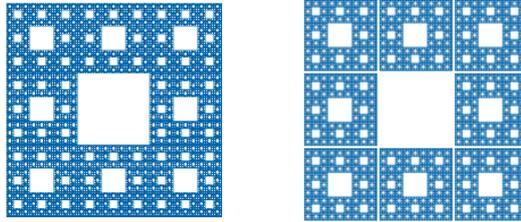
**Figura 3** –  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$



**Fonte:** Autores, 2022

*Exemplo 2.1.4.* O tapete de Sierpinski  $S$  é a união de oito subconjuntos congruentes a ele e não sobrepostos  $S_i, i = 1, 2, \dots, 8$ , que expressam um conjunto autossimilar com  $k = 8$  e  $s = \frac{1}{3}$ , como mostrar na figura a seguir.

**Figura 4** –  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_8$



**Fonte:** Autores, 2022

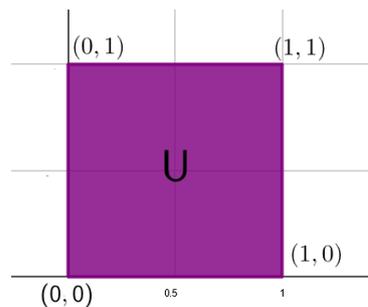
**Definição 2.1.4.** Uma **semelhança** de fator (de escala)  $s$  é uma aplicação de  $\mathbb{T} : \mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  na forma de transformação linear

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \quad (1)$$

em que  $s, \theta, e$  e  $f$  são escalares.

*Exemplo 2.1.5.* Considere um quadrado unitário  $U$  no plano  $xy$  na figura a seguir:

**Figura 5** – Conjunto Unitário  $U$



**Fonte:** Autores, 2022

Considere também, quatro semelhanças  $T_i : i = 1, 2, 3, 4$ , conforme a Definição (1), todas com  $s = \frac{1}{2}$ ,  $\theta = 0$  que ao substituir os valores na matriz apresentada, temos uma matriz identidade que é o elemento neutro e vetores de deslocamento  $(0,0)^T, (1/2,0)^T, (0,1/2)^T$  e  $(1/2,1/2)^T$ , respectivamente.

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$T_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Em (2), o quadrado  $U$  é contraído numa razão de  $1/2$  e não sofre nenhum deslocamento.

Em (3), o quadrado  $U$  é contraído numa razão de  $1/2$  e sofre o deslocamento para a direita.

Em (4), o quadrado  $U$  é contraído numa razão de  $1/2$  e sofre o deslocamento para cima.

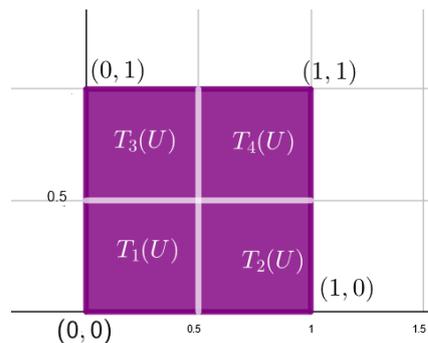
Em (5), o quadrado  $U$  é contraído numa razão de  $1/2$  e sofre o deslocamento para cima.

Dessa maneira, obtendo às quatro semelhanças do quadrado unitário  $U$  temos que

$$U = T_1(U) \cup T_2(U) \cup T_3(U) \cup T_4(U)$$

como mostra na figura abaixo.

**Figura 6 – Conjunto  $U$**



**Fonte:** Autores, 2022

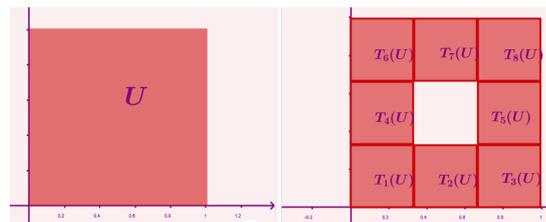
é uma decomposição em quatro quadrados não sobrepostos que são congruentes a contração de  $U$  pelo mesmo fator ( $s = \frac{1}{2}$ ).

*Exemplo 2.1.6.* Considere o quadrado unitário  $U$  do plano  $xy$  e às oito semelhanças a seguir, todas com  $s = \frac{1}{3}$  e  $\theta = 0$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ ,

$$T_i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$$

em que os oito valores de  $\begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$  são  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ , como demonstra na figura a seguir.

**Figura 7 – 8 Semelhanças de U**



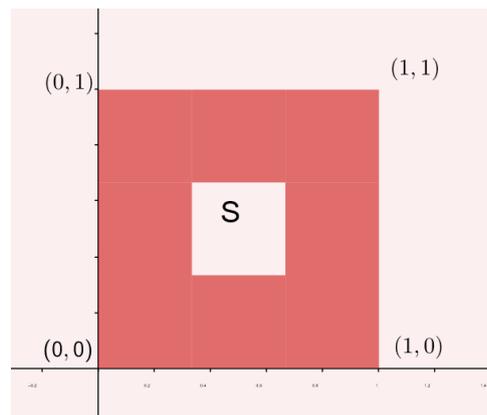
**Fonte:** Autores, 2022

Assim,

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \dots \cup T_8(S)$$

é uma decomposição de S em oito subconjuntos não sobrepostos que são congruentes à contração de S pelo mesmo fator ( $s = \frac{1}{3}$ ).

**Figura 8 – Conjunto S**



**Fonte:** Autores, 2022

## 2.2 Algoritmos para gerar fractais

Os dois algoritmos a seguir foram obtidos do livro (ANTON; RORRES, 2001) e serão usados no GeoGebra nos testes numéricos. No desenvolvimento desta pesquisa foram utilizados somente o algoritmo 1 nas construções do fractais do tipo Remoção.

O algoritmo gera uma sequência de subconjuntos  $S_0, S_1, \dots, S_n$  que converge ao conjunto  $S$ .

### Algoritmo 1

**Passo 0.** Escolha um conjunto não vazio, fechado e limitado  $S_0$  qualquer em  $\mathbb{R}^2$ .

**Passo 1.** Calcule  $S_1 = T(S_0)$

**Passo 2.** Calcule  $S_2 = T(S_1)$

**Passo 3.** Calcule  $S_3 = T(S_2)$

**Passo n.** Calcule  $S_n = T(S_{n-1})$

### Algoritmo 2

**Passo 0.** Escolha um ponto arbitrário  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  em  $S$ .

**Passo 1.** Escolha aleatoriamente uma das  $k$  semelhanças, digamos  $T_{k_1}$ , e calcule

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = T_{k_1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

**Passo 2.** Escolha aleatoriamente um das  $k$  semelhanças, digamos  $T_{k_2}$ , e calcule

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = T_{k_2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

**Passo n.** Escolha aleatoriamente um das  $k$  semelhanças, digamos  $T_{k_n}$ , e calcule

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = T_{k_n} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

## 2.3 Geometria Fractal

A presente pesquisa é um estudo sobre os objetos denominados fractais e procura estabelecer discussões sobre os seus elementos, construção e aplicações na realidade. Segundo (BARBOSA, 2016), os fractais são objetos construídos geometricamente ou obtidos aleatoriamente por meio de processos que podem ser determinados por características como auto-semelhança, dimensão topológica e complexidade. Acredita-se que Benoit Mandelbrot denominou esse fenômeno como fractais, que deriva do latim *fractus*, ou seja, quebrado ou irregular, e não da palavra fracionado como normalmente se pensa, (MANDELBROT, 1998).

Os fractais são semelhantemente formados por mini cópias deslocadas para cada ponto referente a uma construção original, alguns fractais são encontrados na natureza. Segundo (BORSSOI, 2005), as características destes são:

- *Auto-similaridade:* Ao tomarmos um trecho do fractal, percebemos que tal trecho é semelhante ao fractal, apenas com uma redução na escala, do tamanho original. Esta característica permanece em qualquer nível de construção do fractal;
- *Estrutura fina:* O grau de detalhamento de um fractal não diminui se examinarmos uma porção arbitrariamente pequena do mesmo. O fractal possui detalhes em partes tão pequenas como possamos imaginar;
- *Simplicidade da lei de formação:* o alto grau de detalhamento e a complexidade da estrutura de um fractal não impedem que sejam formados por processos simples. Assim é possível construirmos fractais, aplicando algoritmos.

Os fractais são classificados em quatro tipos: Remoção, Ramificação, Árvore e Dürer, (CAMPOS; FAGUNDES, 2018).

Os Fractais do tipo Remoção, como o próprio nome sugere, tem partes removidas da figura inicial e posicionadas em pontos do objeto. Como exemplos de fractais do tipo Remoção temos:

- Conjunto de Cantor.
- Triângulo de Sierpinski.
- Pirâmide ou Tetraedro de Sierpinski.
- Tapete de Sierpinski.
- Esponja de Menger.

Os Fractais do tipo Ramificação são denominados por apresentar divisão de um estrutura ou efeito de ramificar, semelhante aos ramos de uma planta. Como exemplos de Fractais do tipo Ramificação temos: estruturas celulares, estruturas ramificadas de neurônios, ampliação da superfície do pulmão ou intestino, vasos sanguíneos, entres outros.

Os fractais do Tipo Arvore são denominados por apresentar um estrutura semelhante ao de uma árvore. Como exemplos de Fractais do Tipo Árvore temos: Árvore Pitagórica Fundamental, Árvore Bifurcadas, entre outros.

Os Fractais do tipo Durer são desenvolvidos a partir de polígonos regulares que a cada iteração é modificado para o novo polígono colocado em seu vértice. Entretanto, conservando as características da figura inicial. Como exemplos de Fractais do tipo Durer temos: Fractal Pentagonal, Fractal Hexagonal, Fractal Octogonal, entre outros.

Os fractais acima mencionados são os mais conhecidos e faremos a descrição dos fractais do Tipo Remoção individualmente, pois serão estes os que iremos construir com o auxílio do Software GeoGebra na Seção 3.

### 2.3.1 Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor é um fractal do tipo de Remoção, desenvolvido por Georg Cantor, que nasceu no dia 3 de março de 1845, na cidade de São Petersburgo, na Rússia. Inicialmente Georg Cantor, por decisão de seu pai, começou a graduação em engenharia no Instituto Superior Politécnico Grand-Ducal, e residindo longe de sua família ele teve a determinação de pedir a autorização para estudar Matemática por meio de uma carta ao seu pai, contudo, essa autorização só aconteceu dois anos depois, quando já estava terminando a licenciatura em engenharia. E devido à morte de seu pai, em junho de 1863, Georg se mudou para a Universidade de Berlim, onde iniciou sua graduação em Matemática, (BARREIRAS, 2011).

A teoria sobre o Conjunto de Cantor foi introduzida a partir da publicação de seis artigos entre os anos de 1879 a 1884 na revista *Mathematische Annalen*. Dessa maneira, por meio do desenvolvimento da teoria de conjuntos, Cantor estabeleceu os conceitos de número transfinito, número ordinal e número cardinal, assim como a diferença entre estes conceitos. A descoberta do Conjunto de Cantor deu-se a partir da pesquisa de dois problemas: as condições segundo as quais uma função admitia um integral e a unicidade das séries trigonométricas. (BARREIRAS, 2011).

O processo para determinar a construção do Conjunto de Cantor consiste em dividir um segmento inicial em três partes semelhantes e remover um deles em cada etapa. Para entender como acontece esse processo de elaboração do conjunto de Cantor, fazemos a seguinte descrição baseada em (BARREIRAS, 2011).

Considere o intervalo  $C_0 = [0, 1]$ . Dividiremos esse intervalo em três partes iguais, de modo que obtemos os seguintes intervalos:

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \quad (6)$$

**Etapa 1:** Retiramos o intervalo do meio em (6). E assim teremos o conjunto  $C_1$  que é a junção dos intervalos restantes

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Novamente dividimos em três partes iguais os intervalos contidos em  $C_1$ , e assim teremos os próximos intervalos:

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \left[\frac{8}{9}, 1\right]. \quad (7)$$

**Etapa 2:** Removendo os intervalos intermédios em (7), temos o conjunto  $C_2$

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Novamente, considerando os intervalos obtidos em  $C_2$ , dividimos em três partes iguais cada um deles para obter os próximos intervalos:

$$\left[0, \frac{1}{27}\right], \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right), \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] ; \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right], \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), \left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right] ; \quad (8)$$

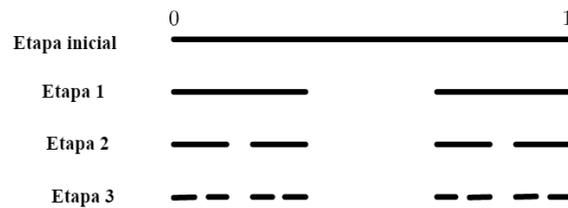
$$\left[\frac{19}{27}\right], \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right), \left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right] \text{ e } \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right], \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right), \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

**Etapa 3:** Removemos novamente os intervalos intermédios abertos (8), teremos o conjunto  $C_3$ .

$$C_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] \cup \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right] \cup \left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right] \cup \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

Esse processo pode ser realizando infinitas vezes. Observe a construção do Conjunto de Cantor na seguinte figura.

**Figura 9** – As primeiras três etapas da construção do Conjunto do Cantor



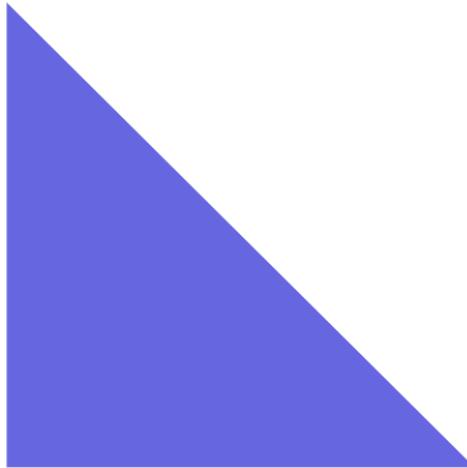
**Fonte:** Elaborada pela autora.

### 2.3.2 Triângulo de Sierpinski

O triângulo de Sierpinski é um fractal do tipo Remoção, desenvolvido por Waclaw Sierpinski, matemático polonês que nasceu em Varsóvia em 14 de março de 1882. O fractal que leva o seu nome é um dos mais famosos por manter o padrão de auto-similaridade ao longo do processo da construção da figura, (GOMES, 2007).

O processo de construção consiste em determinar um triângulo retângulo, mas podemos aplicar o mesmo processo para um triângulo qualquer, como mostram as etapas a seguir baseada em (BARBOSA, 2016).

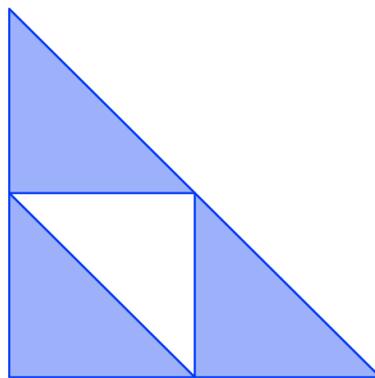
**Figura 10** – Etapa inicial: Triângulo de Sierpinski



**Fonte:** <https://www.geogebra.org/classic/npjqj3jv>

**Etapa 1:** Marcamos os segmentos dos pontos médios de cada lado desse triângulo inicial e unimos esses pontos. Depois, removemos o triângulo do meio.

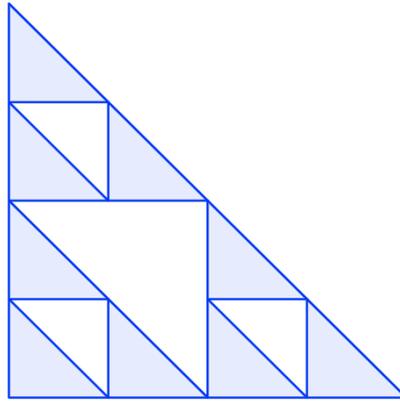
**Figura 11** – Etapa 1: Triângulo de Sierpinski



**Fonte:** <https://www.geogebra.org/classic/npjqj3jv>

**Etapa 2:** Repetimos o processo que fizemos na etapa 1, em cada um dos triângulos restantes.

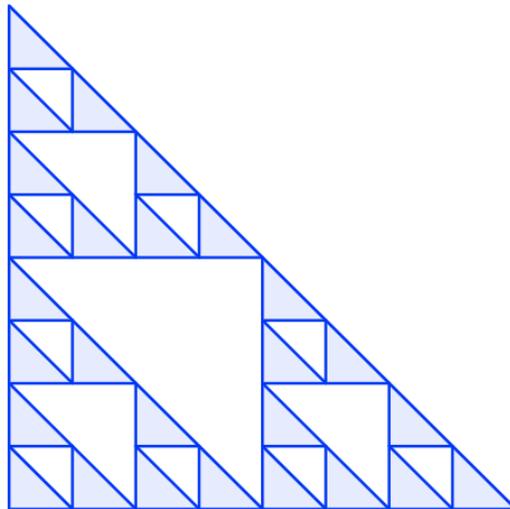
**Figura 12** – Etapa 2: Triângulo de Sierpinski



**Fonte:** <https://www.geogebra.org/classic/npjqj3jv>

**Etapa 3:** E novamente repetimos o processo que fizemos na etapa 1, em cada um dos triângulos restantes da etapa 2 da construção.

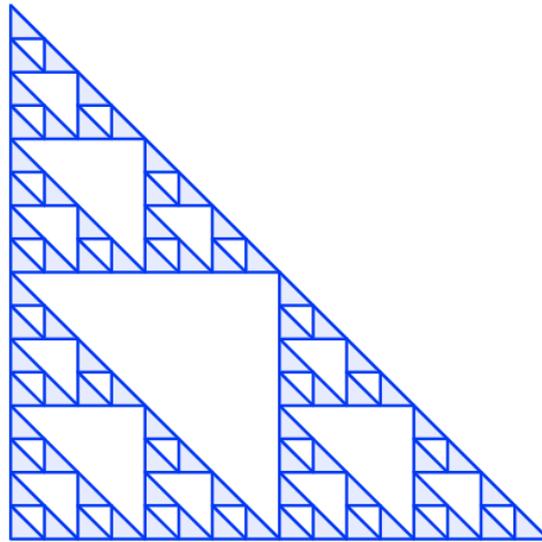
**Figura 13** – Etapa 3: Triângulo de Sierpinski



**Fonte:** <https://www.geogebra.org/classic/npjqj3jv>

**Etapa 4:** Repetimos em cada um dos triângulos não eliminados as construções 2 e 3, esse processo pode ser realizado sucessivamente.

**Figura 14** – Etapa 4: Triângulo de Sierpinski



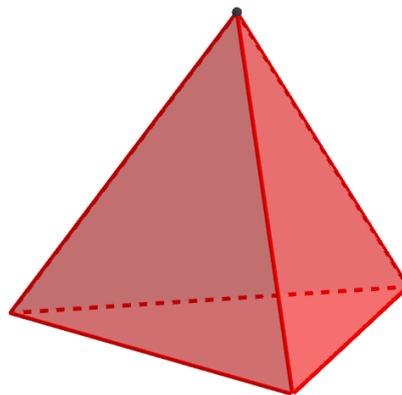
**Fonte:**<https://www.geogebra.org/classic/npjqj3jv>

### 2.3.3 Pirâmide ou Tetraedro de Sierpinski

A pirâmide de Sierpinski é uma representação tridimensional do triângulo de Sierpinski composto por diversos tetraedros, em que cada tetraedro contém outro tetraedro constituído por faces que são triângulos de Sierpinski.

**Etapa inicial:** Considere um tetraedro inicial construído na janela de visualização 3D conforme mostrado na Figura 15.

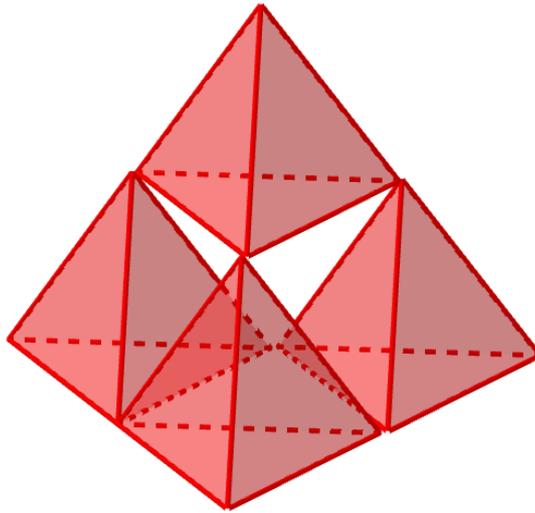
**Figura 15** – Etapa inicial: Tetraedro de Sierpinski



**Fonte:**<https://www.geogebra.org/classic/ytcb3sf>

**Etapa 1:** Este tetraedro será dividido em quatro partes e reduzimos a razão de  $\frac{1}{2}$ , das quais a parte do meio é removida, Obtendo assim a Figura 16.

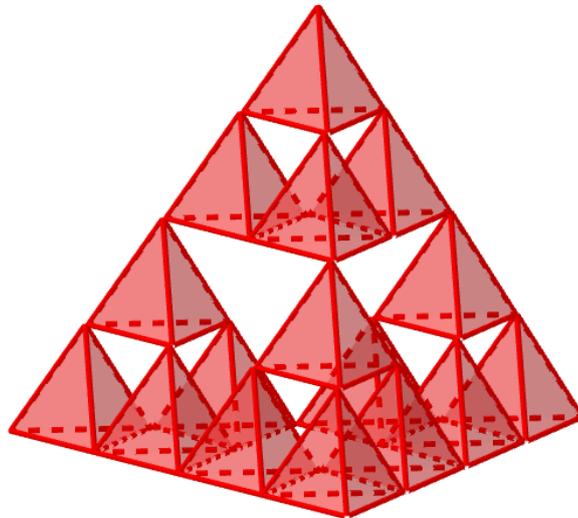
**Figura 16** – Etapa 1: Tetraedro de Sierpinski



**Fonte:**<https://www.geogebra.org/classic/ytchs3sf>

**Etapa 2:** Novamente dividiremos esse tetraedro em 64 quadradinho e reduziremos a razão de  $\frac{1}{2}$ , onde retiramos a parte central. Obtendo assim a Figura 17.

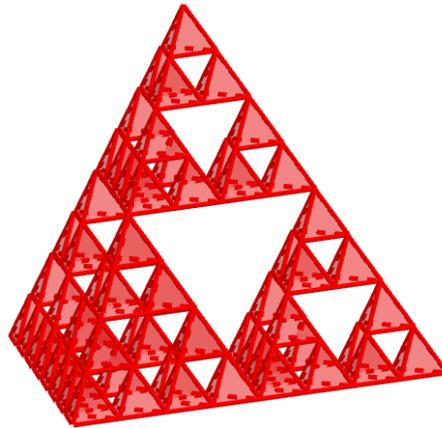
**Figura 17** – Etapa 2: Tetraedro de Sierpinski



**Fonte:**<https://www.geogebra.org/classic/ytchs3sf>

**Etapa 3:** Vamos dividir novamente cada dos quadradinhos em 256 quadradinhos e reduziremos a razão de  $\frac{1}{2}$ , depois retiramos a parte central. Esse processo pode ser feito infinitamente, obtendo assim a Figura 18

**Figura 18** – Etapa 3: Tetraedro de Sierpinski



**Fonte:** <https://www.geogebra.org/classic/ytcb3sf>

#### 2.3.4 Tapete de Sierpinski

O Tapete de Sierpinski conhecido como carpete de Sierpinski foi desenvolvida por Waclaw Sierpinski, é um fractal do tipo Remoção. Podemos aplicar a mesma técnica de eliminação utilizada na construção do triângulo de Sierpinski, a seguir são feitas as descrições de cada etapa da construção do fractal.

**Etapa inicial:** Considere um quadrado inicial conforme mostrado na Figura 19.

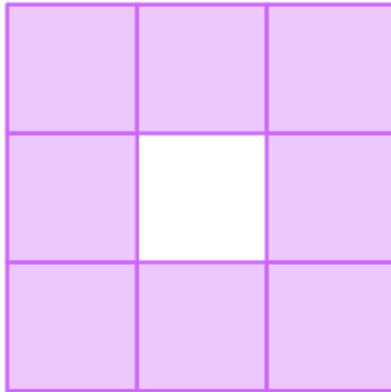
**Figura 19** – Etapa Inicial: Tapete de Sierpinski



**Fonte:** <https://www.geogebra.org/classic/kwgnhkqg>

**Etapa 1:** Este quadrado é dividido em nove partes e reduzimos a razão de  $\frac{1}{3}$ , das quais a parte do meio é removida, de modo que temos oito pequenos quadrados. Obtendo assim a Figura 20.

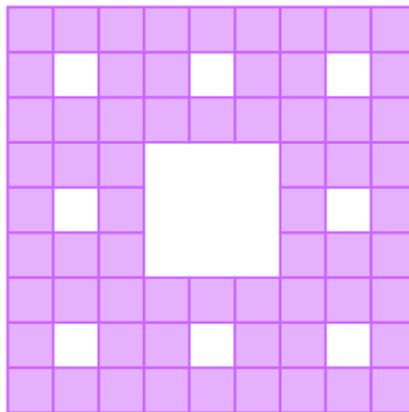
**Figura 20** – Etapa 1: Tapete de Sierpinski



**Fonte:** <https://www.geogebra.org/classic/kwgnhkqg>

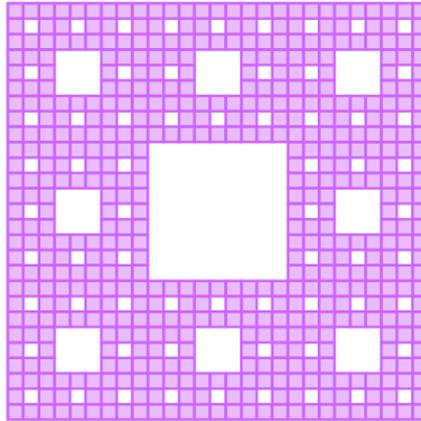
**Etapa 2:** Novamente dividiremos cada quadrado em nove partes e reduziremos a razão de  $\frac{1}{3}$ , onde retiramos a parte central. Obtendo assim a Figura 21.

**Figura 21** – Etapa 2: Tapete de Sierpinski



**Fonte:** <https://www.geogebra.org/classic/kwgnhkqg>

**Etapa 3:** Vamos dividir novamente cada dos quadrados em nove partes e reduzir a razão de  $\frac{1}{3}$ , depois a parte central. Esse processo pode ser feito infinitamente, obtendo assim a Figura 22

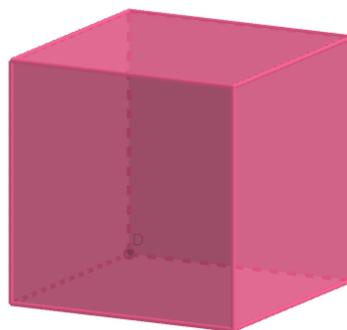
**Figura 22** – Etapa 3: Tapete de Sierpinski

Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/kwgnhkqg>

### 2.3.5 Esponja de Menger

Em 1926, Karl Menger propôs esta "esponja", que nada mais era do que uma representação tridimensional do tapete Sierpinski. Foi projetado por Vaclav Sierpinski há 10 anos. A construção inicia dividindo um cubo em 27 cubos de um terço do seu tamanho e removendo 7 cubos menores (o meio e o 6 no meio dos lados). Para cada cubo restante, o mesmo procedimento é aplicado e assim por diante até o infinito. O conjunto resultante é autossemelhante: quando as peças são dimensionadas corretamente, elas correspondem à ilustração geral.

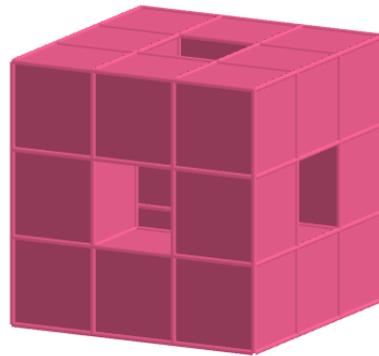
**Etapa inicial:** Considere um cubo inicial construído na janela de visualização 3D conforme mostrado na Figura 23.

**Figura 23** – Etapa Inicial: Esponja de Menger

Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/twsmu7dp>

**Etapa 1:** Este cubo é dividido em 27 partes e reduzimos a razão de  $\frac{1}{3}$ , das quais a parte do meio é removida, de modo que temos 20 pequenos cubos. Obtendo assim a Figura 24.

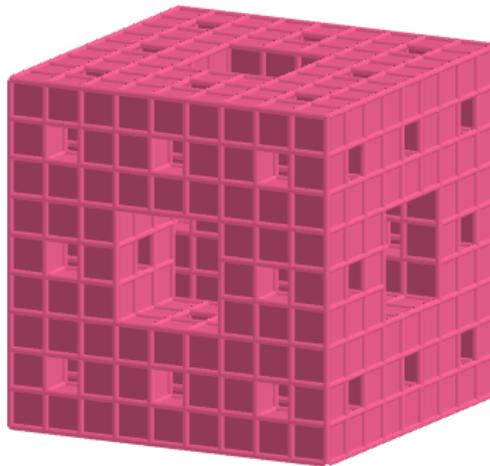
**Figura 24** – Etapa 1: Esponja de Menger



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/twsmu7dp>

**Etapa 2:** Vamos dividir novamente cada dos cubo presentes na construção e reduziremos a razão de  $\frac{1}{3}$ , depois removeremos a parte central. Esse processo pode ser feito infinitamente, obtendo assim a Figura 25

**Figura 25** – Etapa 2: Esponja de Menger



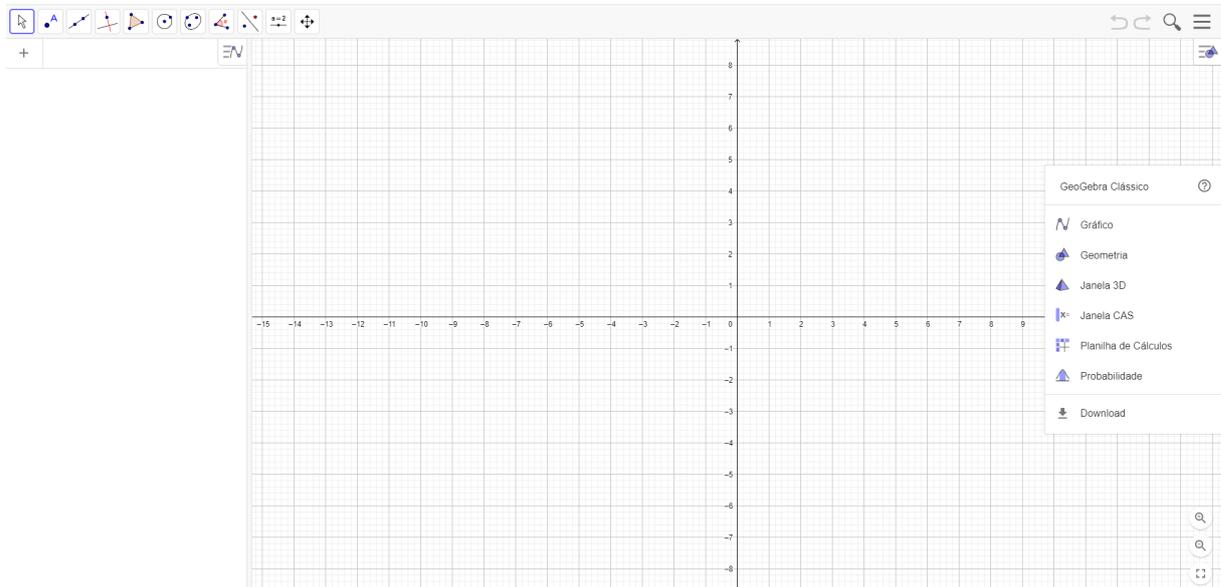
Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/twsmu7dp>

## 2.4 Comandos do GeoGebra utilizados na construção de Fractais

O GeoGebra é um software matemático dinâmico criado por Markus Hohenwarter, ele iniciou o projeto em 2001 para ser utilizado em sala de aula. O programa é gratuito permitindo ao usuário fazer construções geométricas e inserir funções de diversas áreas de Matemática tais como Geometria, Álgebra, Cálculo, Estatística, entre outros. Encontra-se disponível no Site: <<https://www.geogebra.org>> o qual possibilita utilizá-lo online ou baixá-lo em dispositivos eletrônicos. A seguir faremos a descrição dos comandos do GeoGebra que serão utilizados no decorrer deste trabalho de pesquisa. A descrição está baseada em (BORBÓN, 2012).

Ao abrirmos o software GeoGebra aparece a tela inicial que apresenta a barra de menu, e também a barra de ferramentas que fica disponível para realizar diferentes operações.

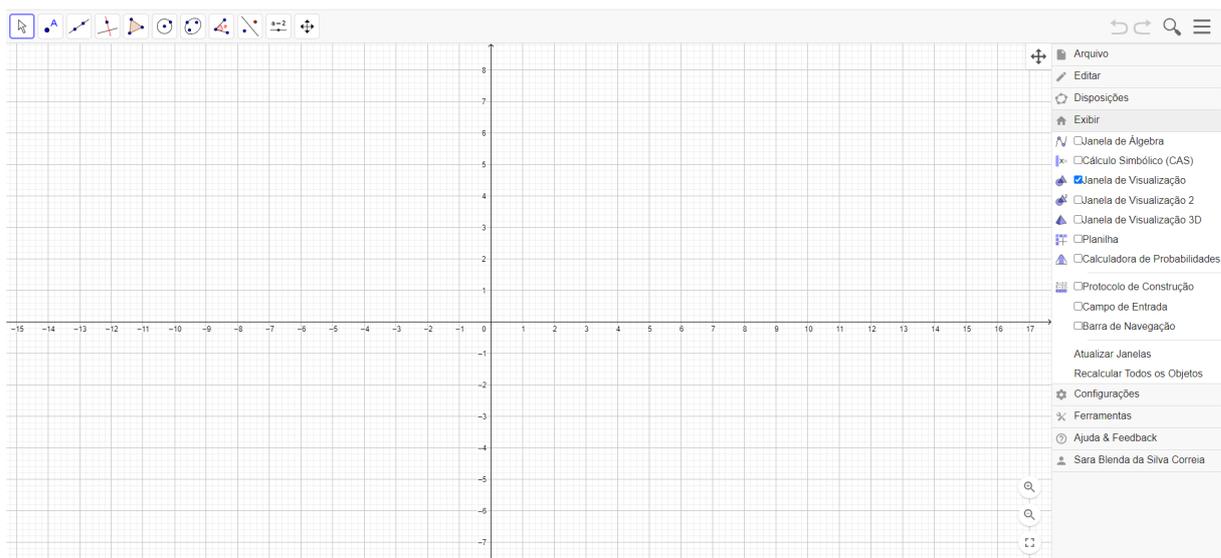
**Figura 26** – Tela inicial do Geogebra



Fonte: GeoGebra Clássico

**Janela de Visualização:** Tem a função de representar as construções geométricas, aritmética ou algébrica construídas ao longo dos comandos.

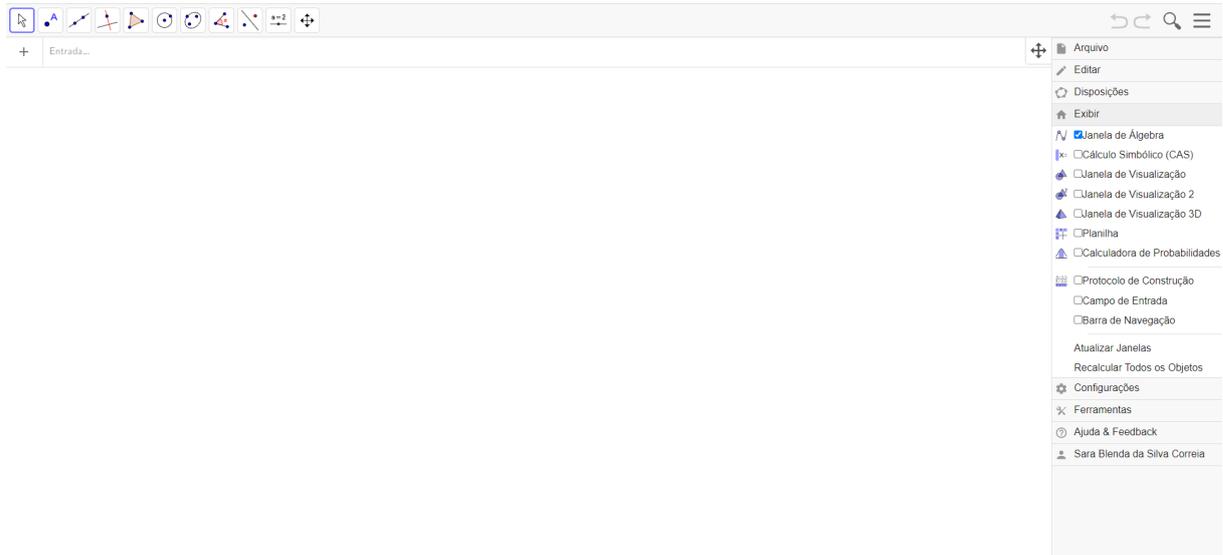
**Figura 27** – Janela de Visualização



Fonte: GeoGebra Clássico

**Janela de Álgebra:** Concede ao usuário a opção de representar as coordenadas dos pontos, vetores, segmentos, polígonos, funções, equações da reta, circunferência, pontos de intersecção e cônicas tanto no plano como no espaço.

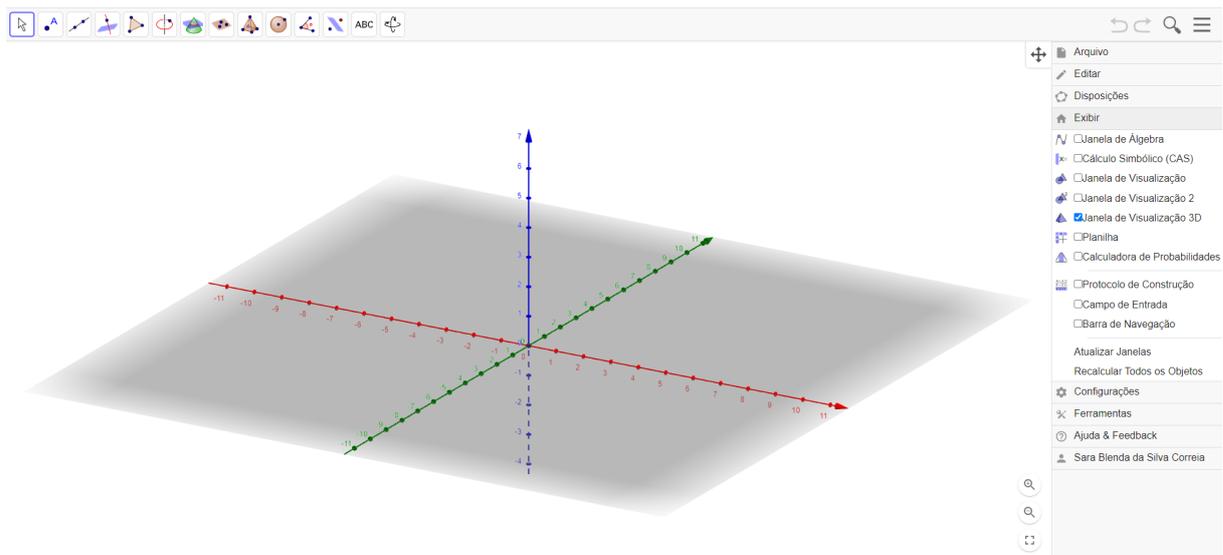
**Figura 28 – Janela de Álgebra**



Fonte: GeoGebra Clássico

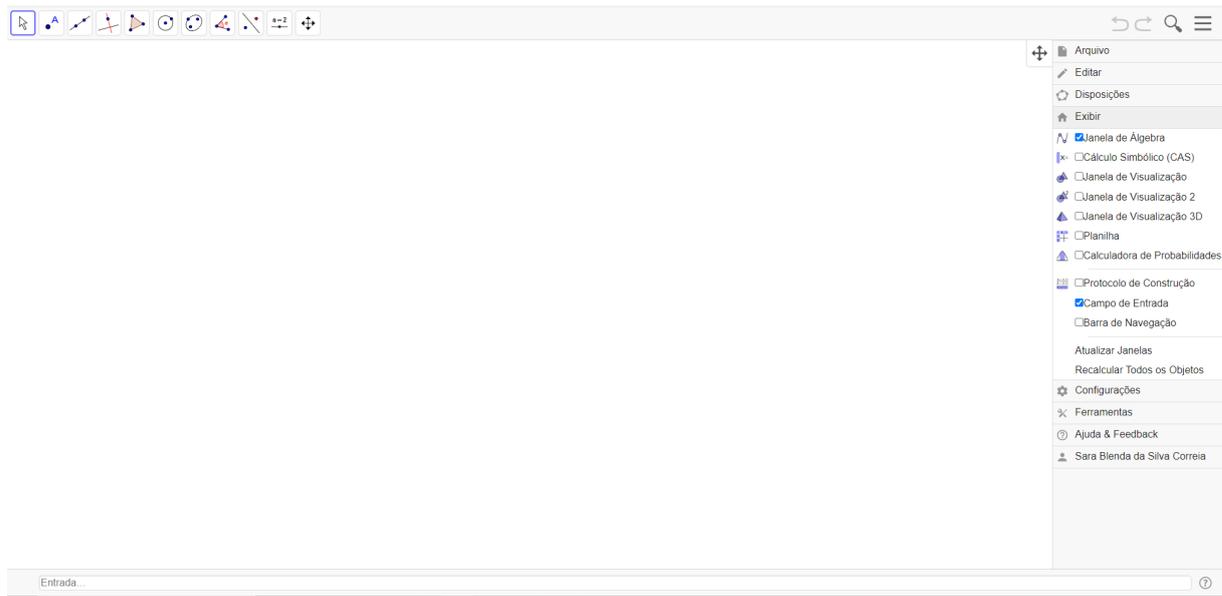
**Janela de Visualização 3D:** Para a utilização dessa função, temos que acessar a opção menu exibir, depois clicar na opção janela de visualização 3D. Quando fazemos essa operação, a barra de ferramenta sofre modificações, essa nova janela apresenta três eixos (eixo x, eixo y, eixo z) com funcionalidades que permitem novas possibilidades de construções com objetos tridimensionais e também a incorporação das janelas de visualização 1 e 2, a planilha e a janela CAS.

**Figura 29 – Janela de Visualização 3D**



Fonte: GeoGebra Clássico

**Campo de Entrada:** É uma caixa de texto que viabiliza a digitação de comandos para construir objetos, realizar transformações, conseguir medidas, entre outros.

**Figura 30 – Campo de Entrada**

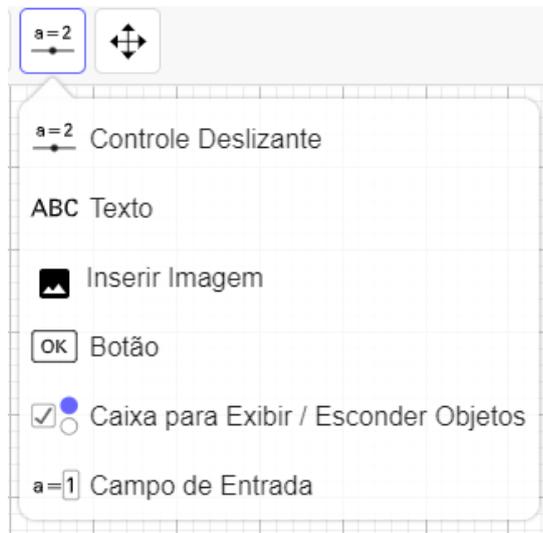
**Fonte:** GeoGebra Clássico

**Polígono Regular:** Para criar um polígono regular é necessário determinar os dois primeiros vértices, e logo, a quantidade total de vértices que a figura possui.

**Figura 31 – Polígono Regular**

**Fonte:** GeoGebra Clássico

**Controle Deslizante:** Para a utilização desta função basta clicar na barra de ferramentas, depois na janela de visualização.

**Figura 32** – Barra de Ferramentas do Geogebra

**Fonte:** GeoGebra Clássico

Podemos configurar esse controle nomeando esse objeto, definindo valor do intervalo e do incremento, modificando as propriedades do controle deslizante. Proporcionado a diversificação dos objetos nas representações e na manipulação da construção.

**Figura 33** – Comando Controle Deslizante

Controle Deslizante

Nome  
a = 1

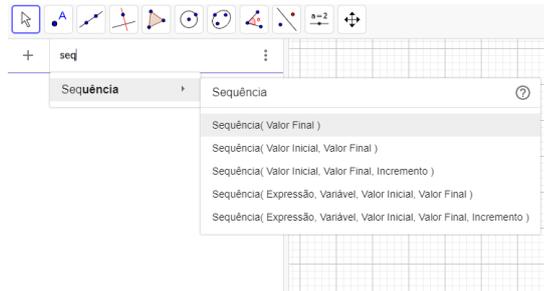
Número  Ângulo  Inteiro

Intervalo	Controle Deslizante	Animação
min -5	max 5	Incremento

CANCELAR OK

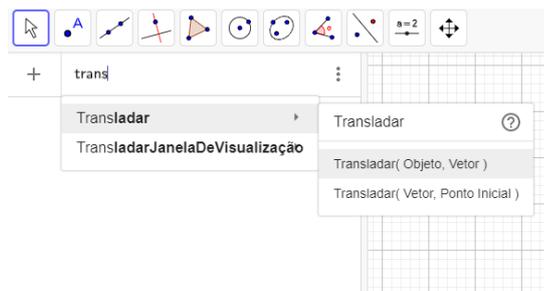
**Fonte:** GeoGebra Clássico

**Sequência:** O comando de sequência mostra cinco sintaxes diferentes. Com a função de representar sequências numéricas ou geométricas, mas, os dois comandos a ser utilizado nesta pesquisa será sequência (<Expressão>, <variável>, <valor inicial>, <valor final>) e (<Expressão>, <variável>, <valor inicial>, <valor final>, <incremento>).

**Figura 34 – Comando Sequência do Geogebra**

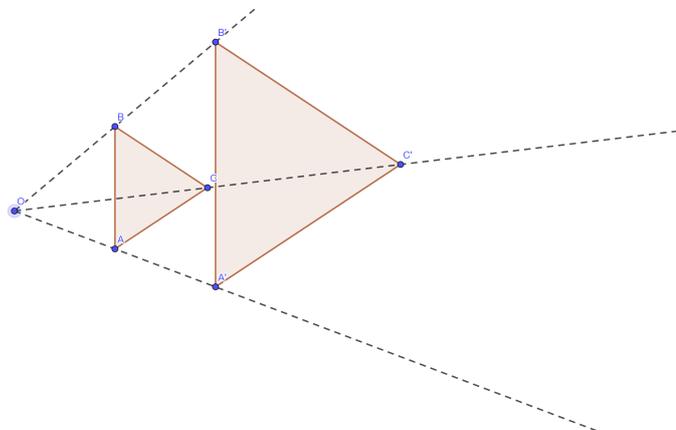
**Fonte:** GeoGebra Clássico

**Transladar:** Com a funcionalidade dessa ferramenta conseguimos transladar um objeto (ponto, segmento, polígono, etc.) para o mesmo lado que o sentido do vetor. Nesse comando temos duas opções, mas, o campo a ser utilizado será Transladar (<objeto>, <vetor>).

**Figura 35 – Comando Transladar do Geogebra**

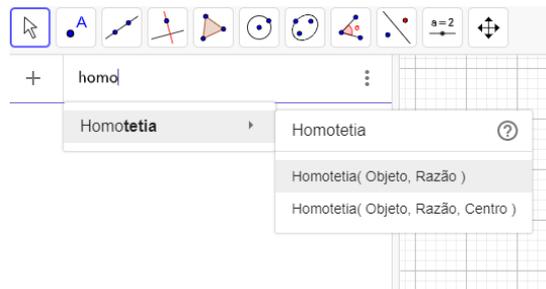
**Fonte:** GeoGebra Clássico

**Homotetia:** É a função de ampliar ou reduzir as distâncias e as áreas a partir de um ponto fixo.

**Figura 36 – Exemplo de Aplicação do Comando Homotetia**

**Fonte:** elaborado pela autora

Esse comando dispõe de duas opções, mas, o campo a ser utilizado será Homotetia (<objeto>, <razão>).

**Figura 37** – Comando Homotetia

**Fonte:** GeoGebra Clássico

Além dos comandos mencionados anteriormente, é possível fazer listas de objetos tais como pontos, polígonos, entre outros, no GeoGebra para ajudar na programação dos algoritmos, para isso basta usar chaves.

### 3 METODOLOGIA

Esta pesquisa tem carácter exploratório, pois busca investigar e difundir as principais características e fenômenos surgidos durante a criação de Fractais do tipo Remoção usando o software GeoGebra e descrevendo todos os passos realizados na experimentação computacional de maneira precisa e sucinta. além disso, segundo (FREIRE, 1971)

"A curiosidade como inquietação indagadora, como inclinação ao desvelamento de algo, como pergunta verbalizada ou não, como procura de esclarecimento, como sinal de atenção que sugere alerta, faz parte integrante do fenômeno vital. Não haveria criatividade sem a curiosidade que nos move e que nos põe pacientemente impacientes diante do mundo que não fizemos, acrescentando a ele algo que fizemos" (FREIRE, 1971, p.53).

Após uma revisão bibliográfica, todos os conceitos e propriedades matemáticas utilizadas na construção de Fractais do tipo Remoção serão estudados e traduzidos nos comandos do GeoGebra, dentre os quais podemos destacar: *Lista*, *Homotetia*, *Girar*, *Transladar*, *Sequência*, *Deslizador*, entre outros.

A primeira parte da pesquisa consiste num estudo teórico dos conceitos matemáticos usados na geometria fractal, tais como: homotetias, rotações, translações, semelhanças, entre outros. A segunda parte consiste numa classificação dos fractais de forma geral e uma descrição dos Fractais do tipo Remoção que serão construídos com o auxílio do software GeoGebra, focando nas suas principais características e exemplos de aplicação mais notáveis na literatura atual.

A terceira parte consiste em usar o GeoGebra para representar cinco tipos de fractais do tipo Remoção de maneira dinâmica. Usaremos os algoritmos descritos no Capítulo 11 do livro (ANTON; RORRES, 2001). Far-se-á uma descrição detalhada de cada passo da construção de todos os conceitos matemáticos envolvidos e como estes estão relacionados com os diversos comandos do GeoGebra. O objetivo é que este trabalho seja um manual de construção de alguns fractais para mostrar alguma aplicação da matemática e informática.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

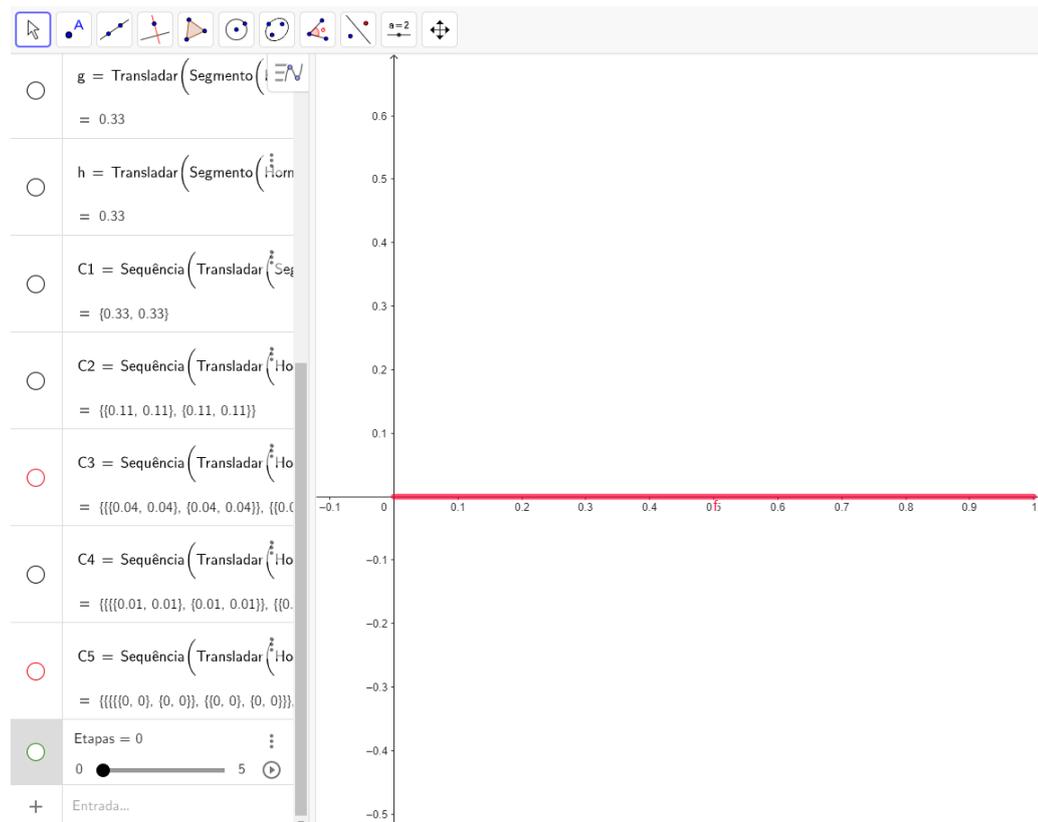
Nesta seção apresentamos o passo a passo da construção dos cinco fractais do Tipo Remoção apresentados no Capítulo 2, descrevendo os comandos do GeoGebra utilizados em cada etapa.

### 4.1 Conjunto de Cantor

Para iniciar a construção do Conjunto de Cantor, selecione os pontos  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ , no plano. Em seguida, escolha opção Segmento na barra de Ferramenta ligando esses pontos. Note que na Figura 38, o segmento construído é chamado de  $f$ .

Vamos digitar na Janela de Álgebra os dois vetores que serão usados nas semelhanças que serão aplicadas no segmento construído. Esses vetores são  $v_1 = (0,0)^T$ ,  $v_2 = (\frac{2}{3}, 0)^T$ .

**Figura 38** – Construções iniciais do Conjunto de Cantor



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/kkwejgus>

**Etapa 1:** Nesse passo, construímos uma Lista no GeoGebra para realizar as semelhanças dadas pelas Equações (9), (10). Nomearemos esta lista como  $L = \{v_1, v_2\}$ .

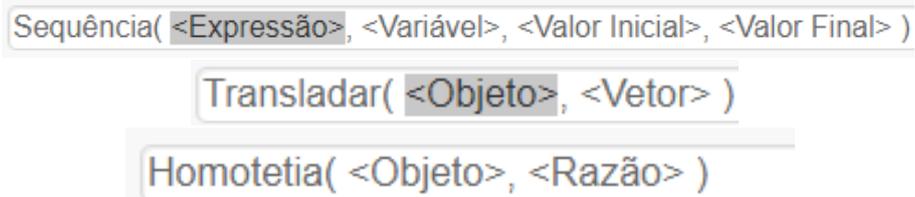
$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_1 \quad (9)$$

$$T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_2 \quad (10)$$

Posteriormente, recomendamos ao leitor substituir a utilização da Janela de Álgebra pelo Campo de Entrada para a digitação dos comandos essenciais para a construção dos fractais, visto que estes podem ser extensos.

Utilizaremos os comandos a seguir:

**Figura 39** – Comandos utilizados na construção do Conjunto de Cantor



Fonte:GeoGebra

Digitamos no Campo de Entrada do GeoGebra a seguinte instrução:

C1= Sequência ( <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>,<incremento>)

onde:

- <Expressão> será substituído por: Transladar (Homotetia ( $f, 1/3$ )),  $L(i)$ );
- <Variável> será substituída por  $i$ ;
- <Valor Inicial> será substituído por 1;
- <Valor Final> será substituído por 2.
- <incremento> será substituído por 1.

Observe também que no comando <Transladar>

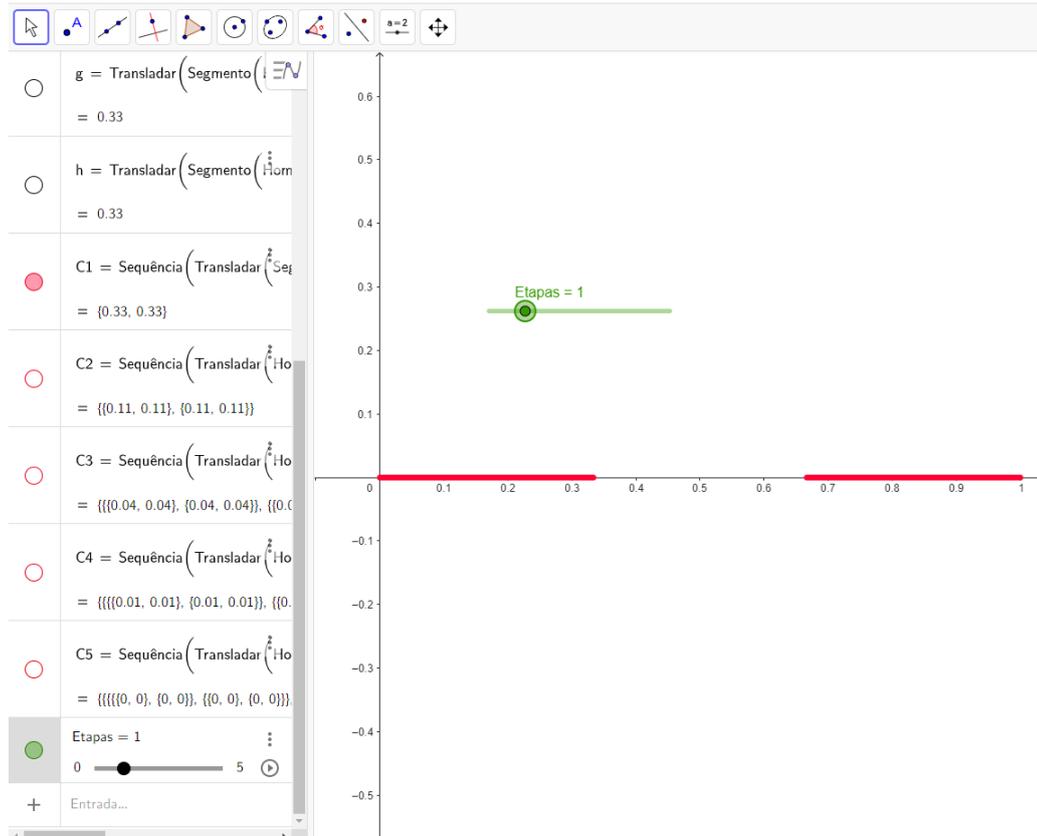
- <Objeto> foi substituído por: Homotetia ( $f, 1/3$ );
- <Vetor> foi substituído por:  $L(i)$ .

No comando <Homotetia>

- <Objeto> foi substituído por:  $f$ ;
- <Razão> foi substituído por  $\frac{1}{3}$ .

O gráfico resultante da instrução de C1, pode ser visto na Figura 40.

**Figura 40** – Etapa 1: Resultado de aplicar a sequência C1



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/kkwejgus>

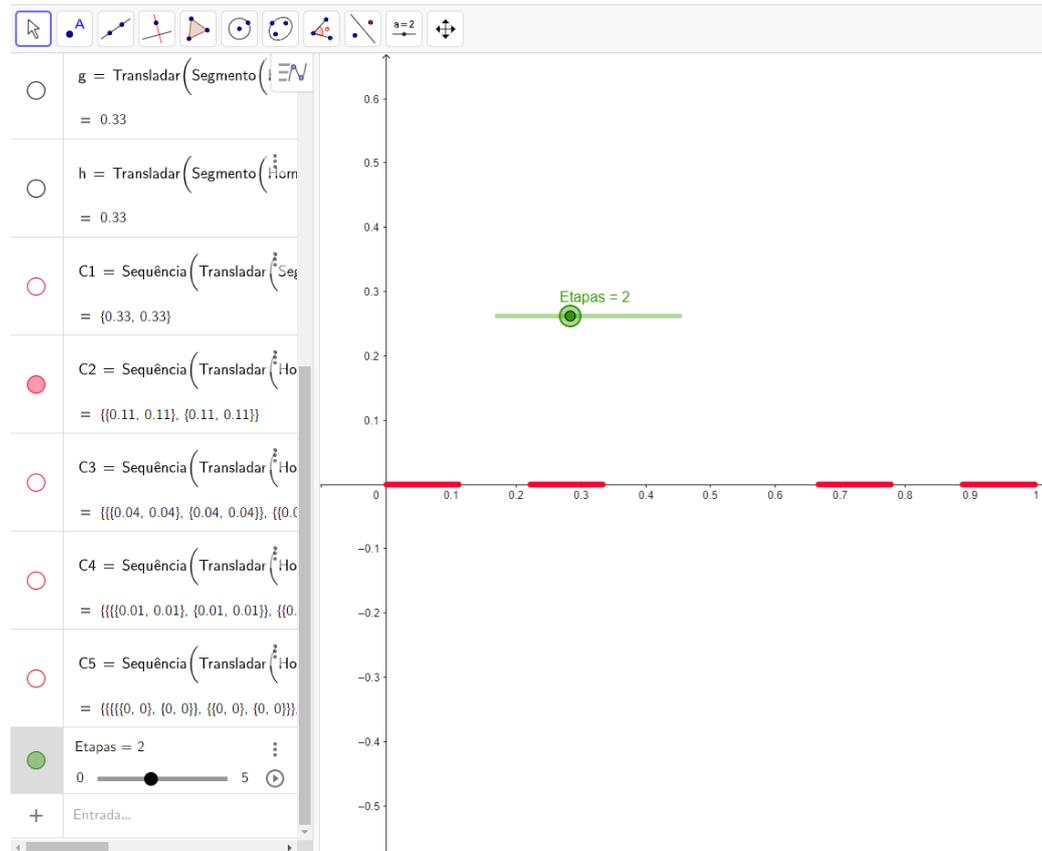
**Etapa 2:** Para graficar a segunda etapa, usaremos uma instrução similar à etapa anterior, com a diferença de que o objeto ao que serão aplicadas as duas semelhanças é  $C1$  e não  $f$ .

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$C2 = \text{Sequência}(\text{Transladar}(\text{Homotetia}(C1, 1/3)), L(i)), i, 1, 2, 1)$$

Observe o gráfico resultante de  $C2$ , pode ser visto na Figura 41

**Figura 41** – Etapa 2: Resultado de aplicar a sequência C2



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/kkwejgus>

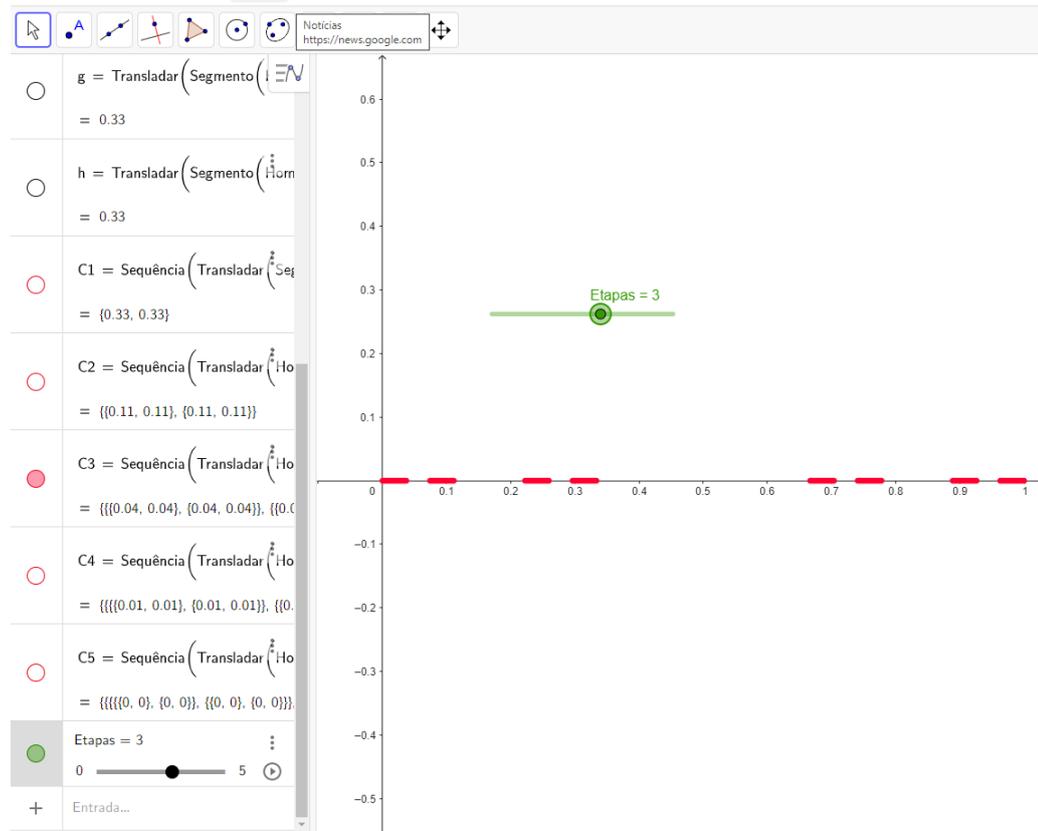
**Etapa 3:** Nesta etapa, usaremos uma instrução semelhante à etapa anterior, com a diferença que o objeto ao que serão aplicadas as duas semelhanças é C2.

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$C3 = \text{Sequência} (\text{Transladar} (\text{Homotetia} (C2, 1/3), L(i)), i, 1, 2, 1).$$

Observe o gráfico resultante de C3 pode ser visto na Figura 42

**Figura 42** – Etapa 3: Resultado de aplicar a sequência C3



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/kkwejgus>

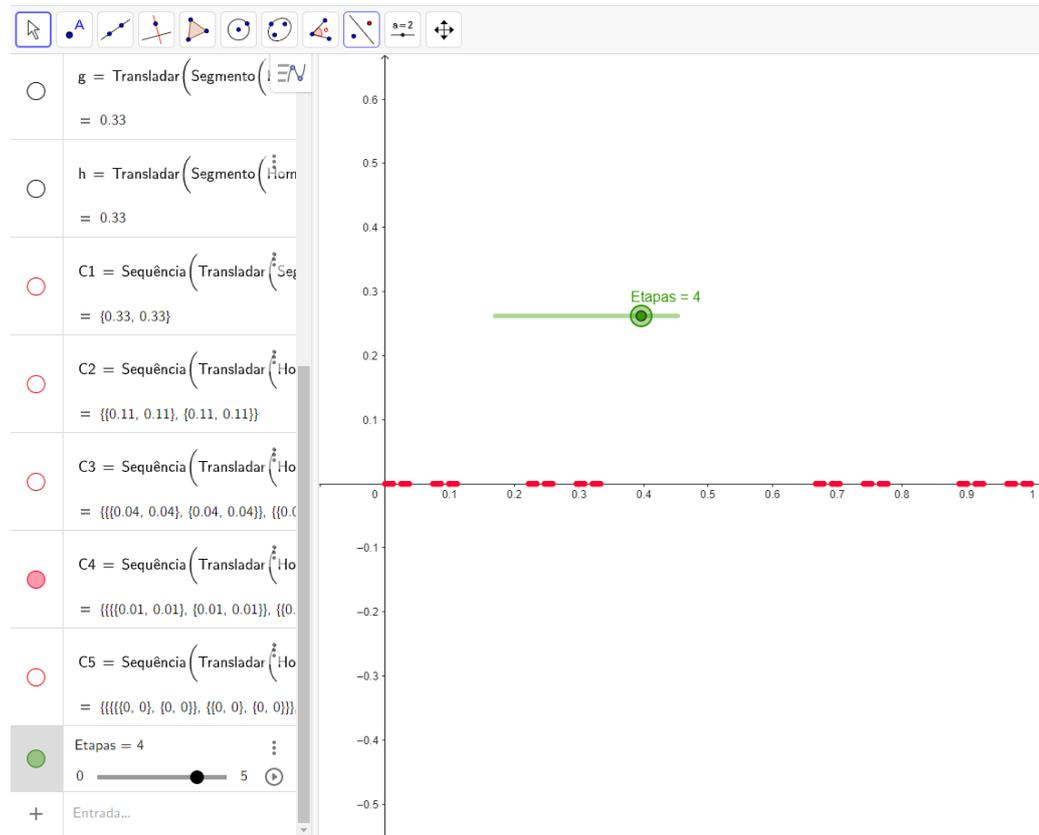
**Etapa 4:** Nesta etapa, usaremos uma instrução semelhante à etapa anterior, com a diferença que o objeto ao que serão aplicadas as duas semelhanças é C3.

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$C4 = \text{Sequência}(\text{Transladar}(\text{Homotetia}(C3, 1/3), L(i)), i, 1, 2, 1)$$

Observe o gráfico resultante de C4 pode ser visto na Figura 43.

**Figura 43** – Etapa 4: Resultado de aplicar a sequência C4



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/kkwejgus>

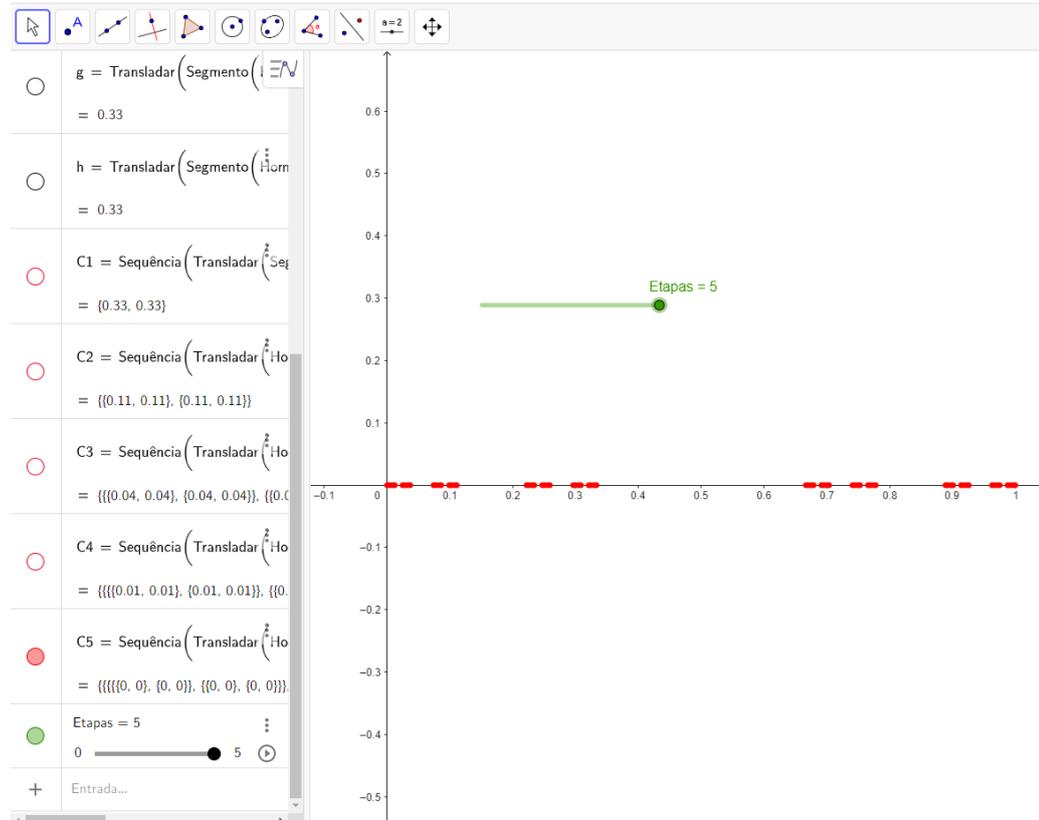
**Etapa 5:** Para realização da quinta etapa, usaremos uma instrução semelhante à etapa anterior, com a diferença que o objeto que serão aplicadas as duas semelhanças é C4 e não C3.

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$C5 = \text{Sequência}(\text{Transladar}(\text{Homotetia}(C4, 1/3), L(i)), i, 1, 2, 1).$$

Observe o gráfico resultante de C5 pode ser visto na Figura 44.

**Figura 44** – Etapa 5: Resultado de aplicar a sequência C5

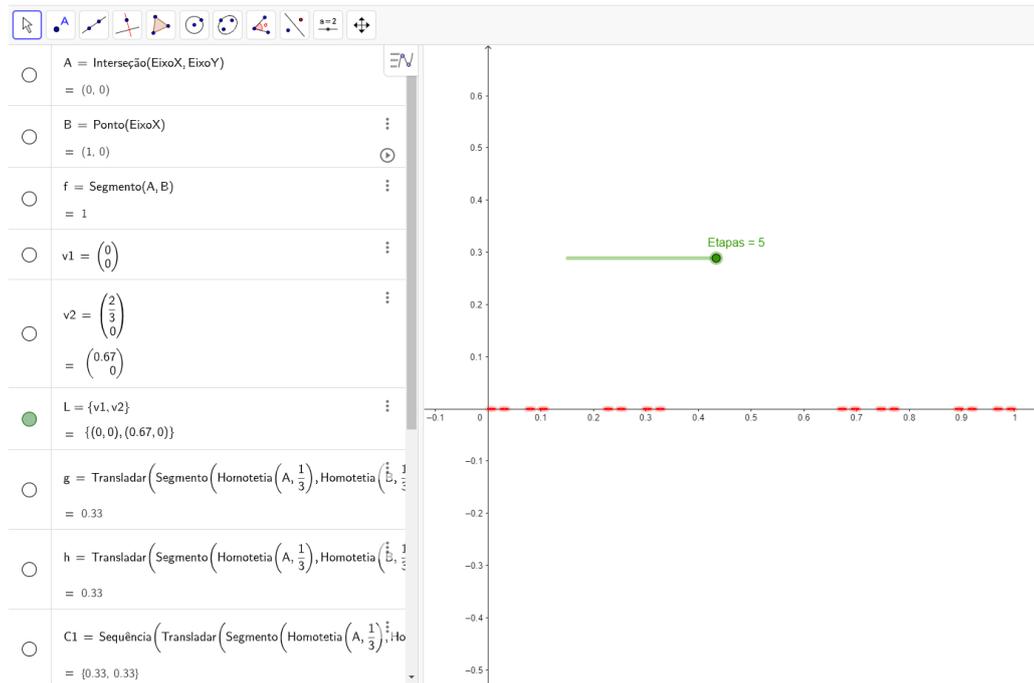


Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/kkwejgus>

Observe que as figuras 44 e 43 é a mesma porque não podemos ver os intervalos que existem na estrutura da figura. Por isso resolvemos diminuir a espessura do segmento para verificar se conseguimos visualizar melhor o passo 5.

Observe o gráfico resultante da redução da espessura de C5 pode ser visto na Figura 45.

**Figura 45** – Etapa 5: Gráfico resultante da redução da espessura de  $C5$



**Fonte:** <https://www.geogebra.org/classic/kkwejgus>

Como vimos na figura 45, com a diminuição da espessura na etapa 5, a construção continuou a mesma que anterior, não conseguimos visualizar os intervalos presente na figura. Por esse motivo, decidimos que a construção do conjunto de Cantor seria construído até a etapa 5, pois a partir dessa etapa quase não conseguimos visualizar os intervalos.

Para deixar a construção do fractal mais dinâmica, usaremos um controle deslizante que nos permita visualizar os níveis de cada etapa construída. Para isso basta selecionar a opção "Controle Deslizante" ou "Deslizador" na Barra de Ferramentas.

Digitamos as seguintes instruções para o Controle Deslizante do GeoGebra:

onde:

- <Nome> será substituído por: Etapas
- <Mínimo> será substituída por 0;
- <Máximo> será substituído por 5;
- <Incremento> será substituído por 1.

Assim, é necessário ingressar nas "Configurações" do "Controle Deslizante", na opção "Avançado" e digitar no campo "Condição para Exibir Objeto(s)", as seguintes instruções:

- $f$  aparecerá quando a Etapas = 0;
- $C1$  aparecerá quando a Etapas = 1;
- $C2$  aparecerá quando a Etapas = 2;
- $C3$  aparecerá quando a Etapas = 3;
- $C4$  aparecerá quando a Etapas = 4;

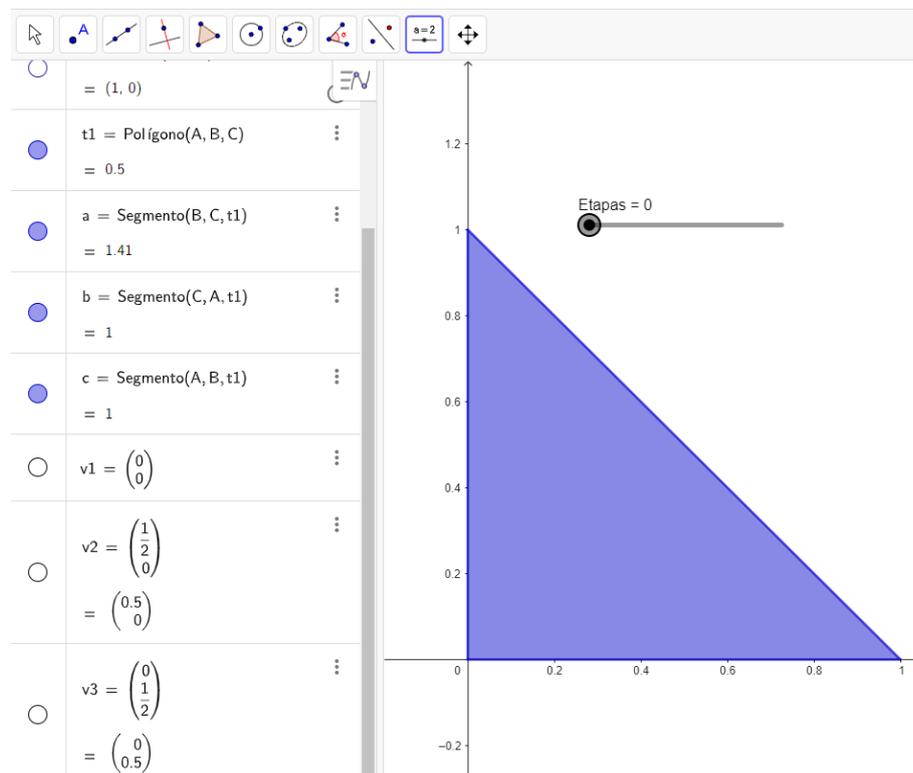
- C55 aparecerá quando a Etapas = 5;

## 4.2 Triângulo de Sierpinski

Para iniciar a construção, selecione os pontos  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  no plano. Em seguida, escolha opção Polígonos na barra de Ferramenta ligando cada um dos pontos, estabelecendo um triângulo.

Vamos digitar na Janela de Álgebra os três vetores que serão usados nas semelhanças que serão aplicadas no triângulo construído. Esses vetores são  $v_1 = (0,0)^T$ ,  $v_2 = (\frac{1}{2},0)^T$  e  $v_3 = (0,\frac{1}{2})^T$ .

**Figura 46** – Construções iniciais do Triângulo de Sierpinski



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/npjqj3jv>

**Etapa 1:** Nesse passo, construímos uma Lista no GeoGebra para realizar as semelhanças dadas pelas Equações (11), (12) e (13). Nomearemos esta lista como  $L_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ .

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_1 \quad (11)$$

$$T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_2 \quad (12)$$

$$T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_3 \quad (13)$$

Posteriormente, recomendamos ao leitor substituir a utilização da Janela de Álgebra pelo Campo de Entrada para a digitação dos comandos essenciais para a construção dos fractais, visto que estes podem ser extensos.

Observe que na Figura 46, o triângulo inicial azul é denominado pelo GeoGebra de  $t1$ . Utilizaremos os comandos a seguir:

**Figura 47** – Comandos utilizados na construção do triângulo de Sierpinski

Sequência( <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )  
 Transladar( <Objeto>, <Vetor> )  
 Homotetia( <Objeto>, <Razão> )

Fonte:GeoGebra

Digitamos no Campo de Entrada do GeoGebra a seguinte instrução:

$l1 = \text{Sequência} ( \langle \text{Expressão} \rangle, \langle \text{Variável} \rangle, \langle \text{Valor Inicial} \rangle, \langle \text{Valor Final} \rangle )$

onde:

- <Expressão> será substituído por: Transladar (Homotetia ( $t1, 1/2$ )),  $L1(i)$ ;
- <Variável> será substituída por  $i$ ;
- <Valor Inicial> será substituído por 1;
- <Valor Final> será substituído por 3.

Observe também que no comando <Transladar>

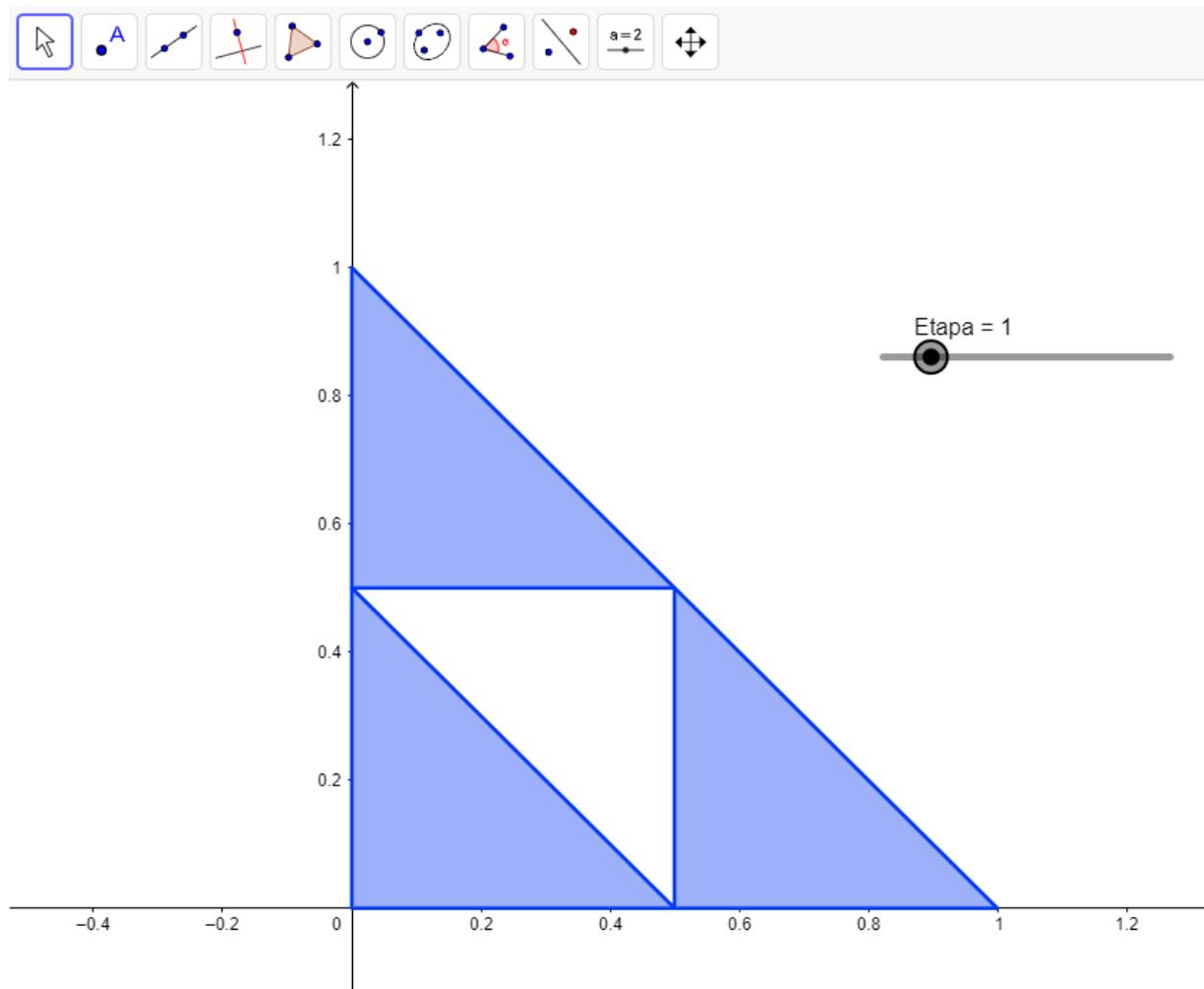
- <Objeto> foi substituído por: Homotetia ( $t1, 1/2$ );
- <Vetor> foi substituído por:  $L1(i)$ .

No comando <Homotetia>

- <Objeto> foi substituído por:  $t1$ ;
- <Razão> foi substituído por  $\frac{1}{2}$ .

O gráfico resultante da instrução de  $l1$ , pode ser visto na Figura 48.

**Figura 48** – Etapa 1: Resultado de aplicar a sequência  $l1$



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/npjqj3jv>

Observe que o resultado obtido na Figura 48 é a aplicação das três semelhanças ao triângulo inicial  $t1$ .

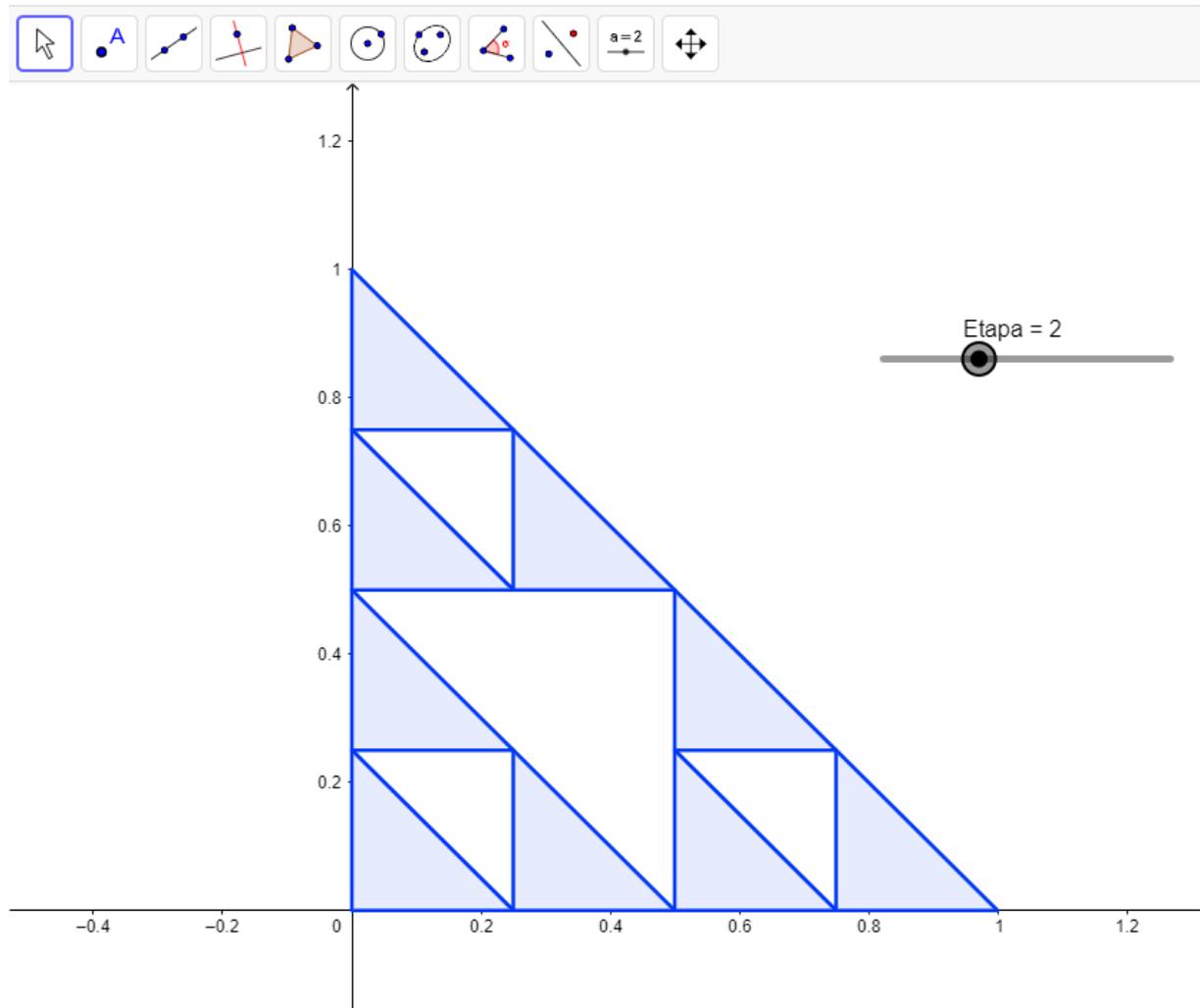
**Etapa 2:** Para graficar a segunda etapa, veja a Figura 49, usaremos uma instrução similar a  $l1$ , com a diferença de que o objeto ao que serão aplicadas as três semelhanças é  $l1$  e não  $t1$ .

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$l2 = \text{Sequência}(\text{Transladar}(\text{Homotetia}(l1, 1/2)), L1(i), i, 1, 3)$$

Observe o gráfico resultante de  $l2$ , pode ser visto na Figura 49

**Figura 49** – Etapa 2: Resultado de aplicar a sequência  $I_2$



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/npjqj3jv>

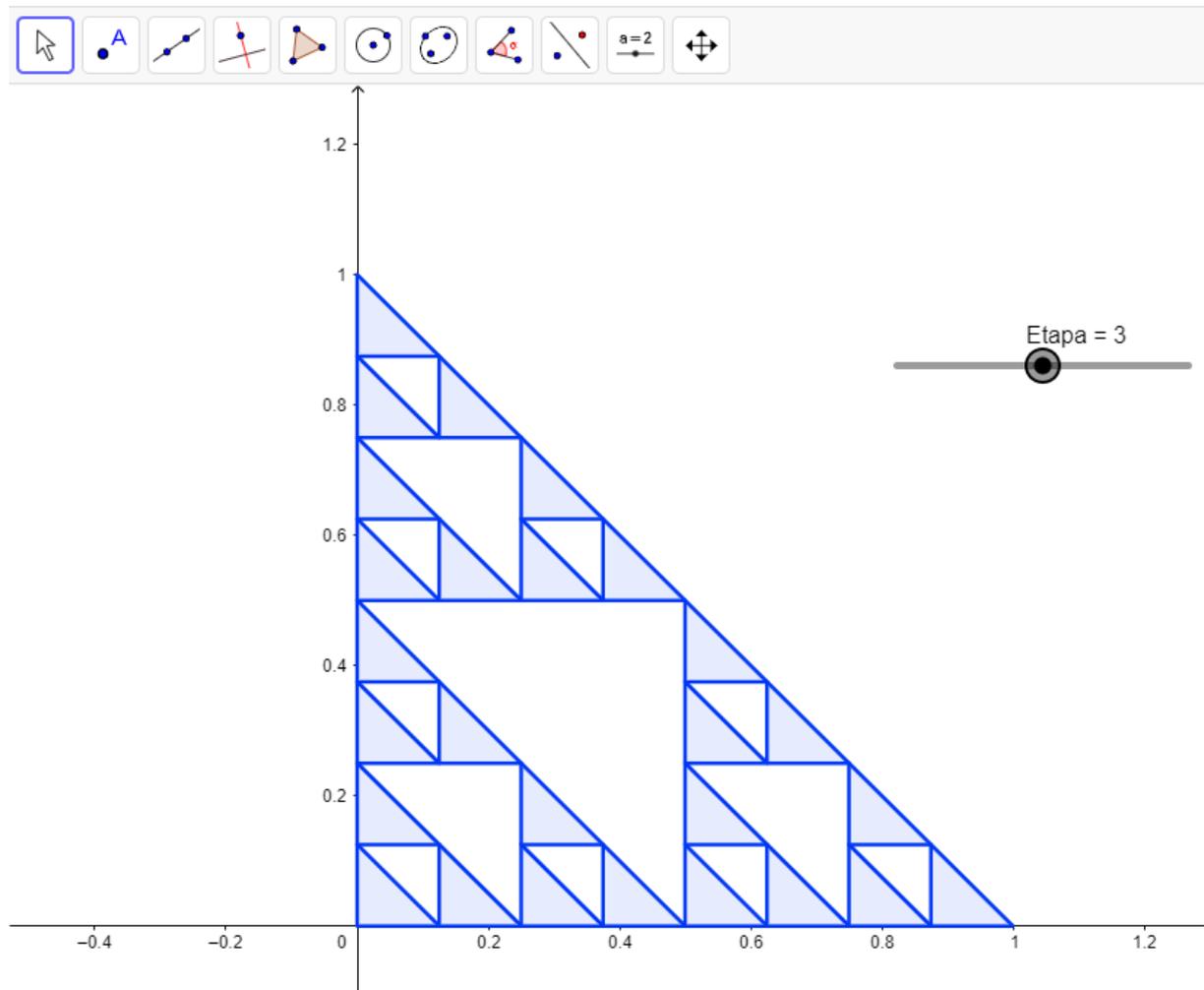
**Etapa 3:** Nesta etapa, usaremos uma instrução semelhante à etapa anterior, com a diferença que o objeto ao que serão aplicadas as três semelhanças é  $I_2$ , veja a Figura 49.

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$I_3 = \text{Sequência (Transladar (Homotetia (I_2, 1/2), L_1(i)), i, 1,3).$$

Observe o gráfico resultante de  $I_3$  pode ser visto na figura 50

**Figura 50** – Etapa 3: Resultado de aplicar a sequência  $I_3$



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/npjqj3jv>

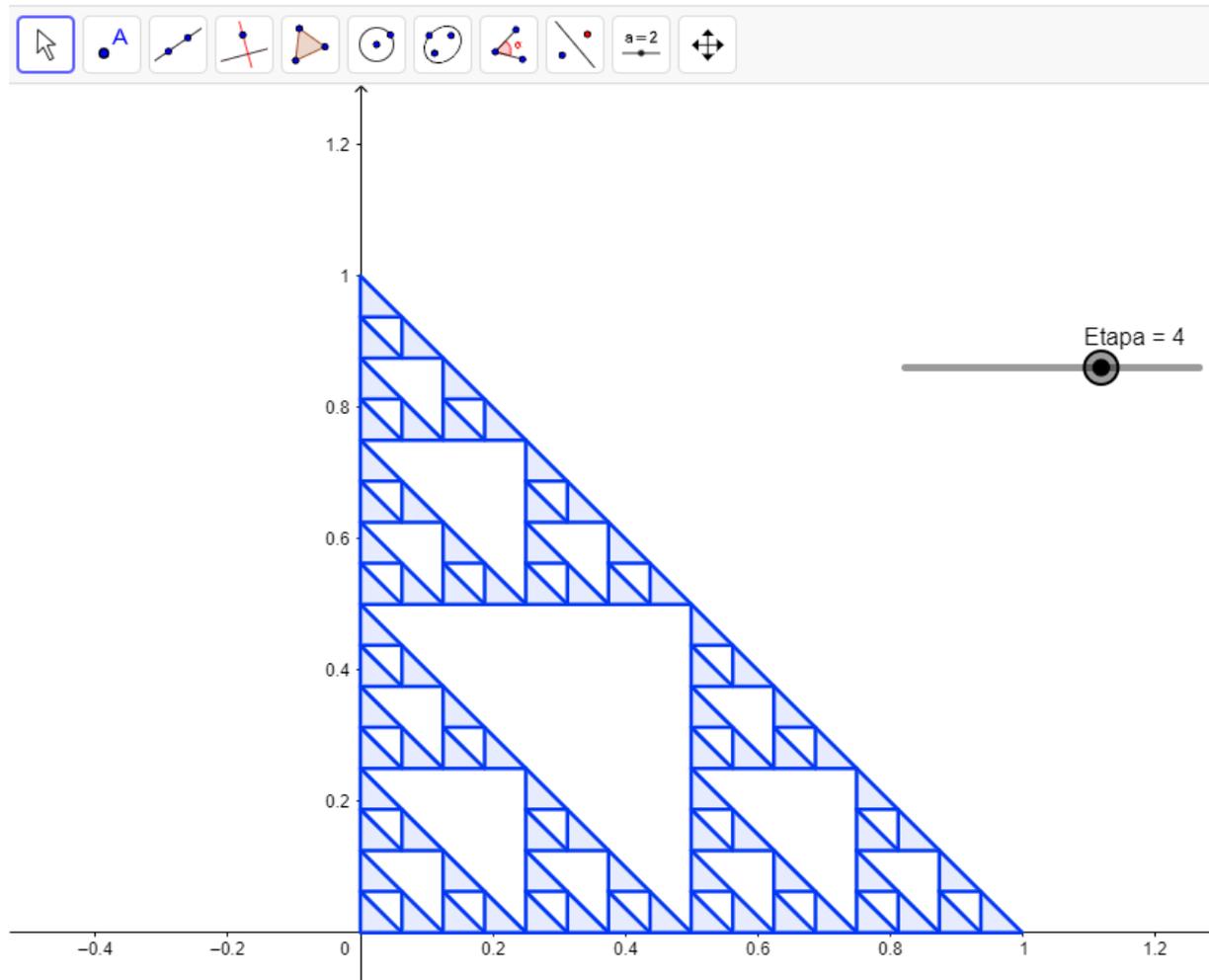
**Etapa 4:** Nesta etapa, usaremos uma instrução semelhante à etapa anterior, com a diferença que o objeto ao que serão aplicadas as três semelhanças é  $I_3$ , veja a Figura 50.

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$I_4 = \text{Sequência (Transladar (Homotetia (I_3, 1/2), L_1(i)), i, 1, 3)}$$

Observe o gráfico resultante de  $I_4$  pode ser visto na Figura 51.

**Figura 51** – Etapa 4: Resultado de aplicar a sequência  $I_4$



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/npjqj3jv>

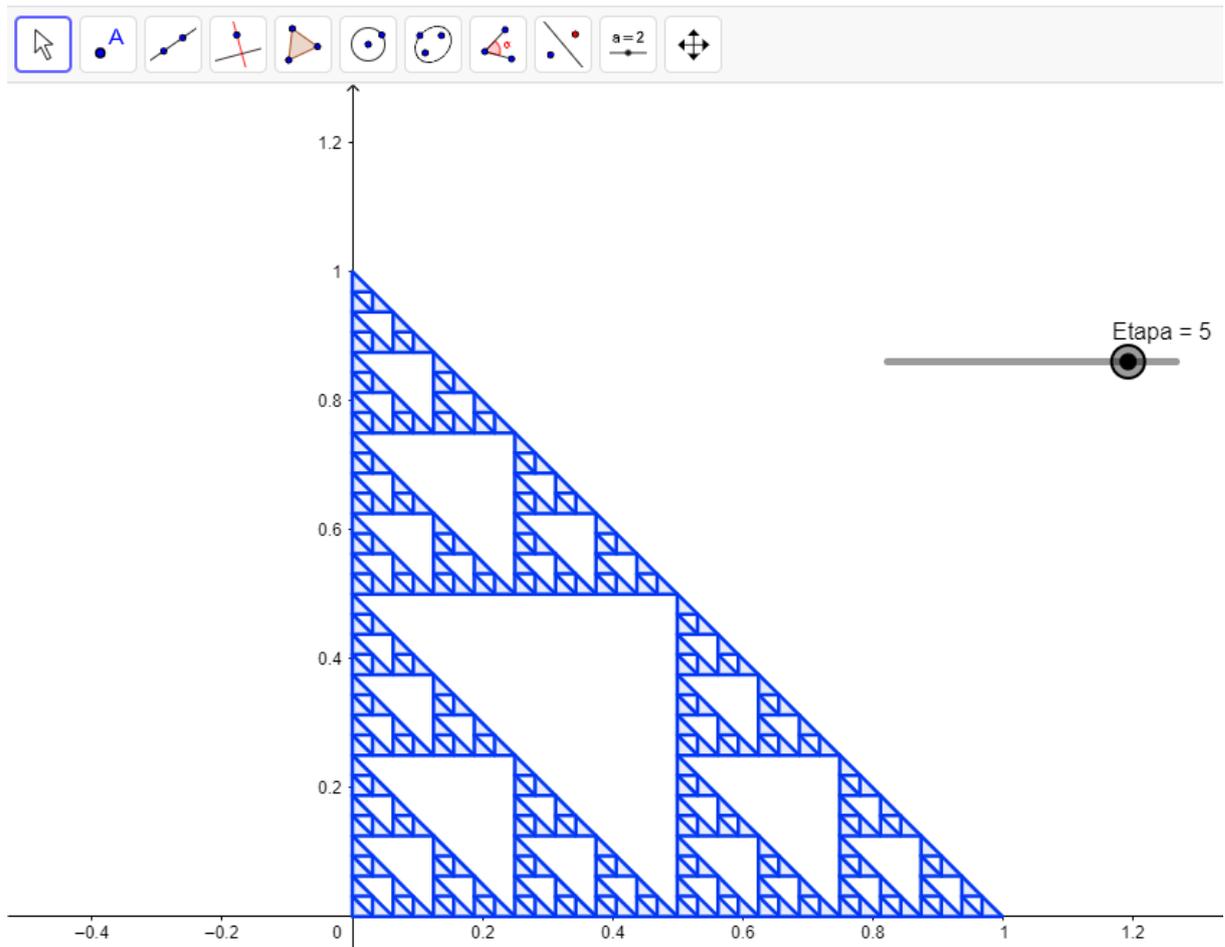
**Etapa 5:** Para realização da quinta etapa, examine a Figura 51, pois usaremos uma explicação equivalente a de  $I_4$ , com a diferença que o objeto que serão aplicadas as três semelhanças é  $I_4$  e não  $I_3$ .

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$I_5 = \text{Sequência (Transladar (Homotetia (I_4, 1/2), L_1(i)), i, 1, 3).$$

Observe o gráfico resultante de  $I_5$  pode ser visto na Figura 52.

**Figura 52** – Etapa 5: Resultado de aplicar a sequência  $I5$



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/npjqj3jv>

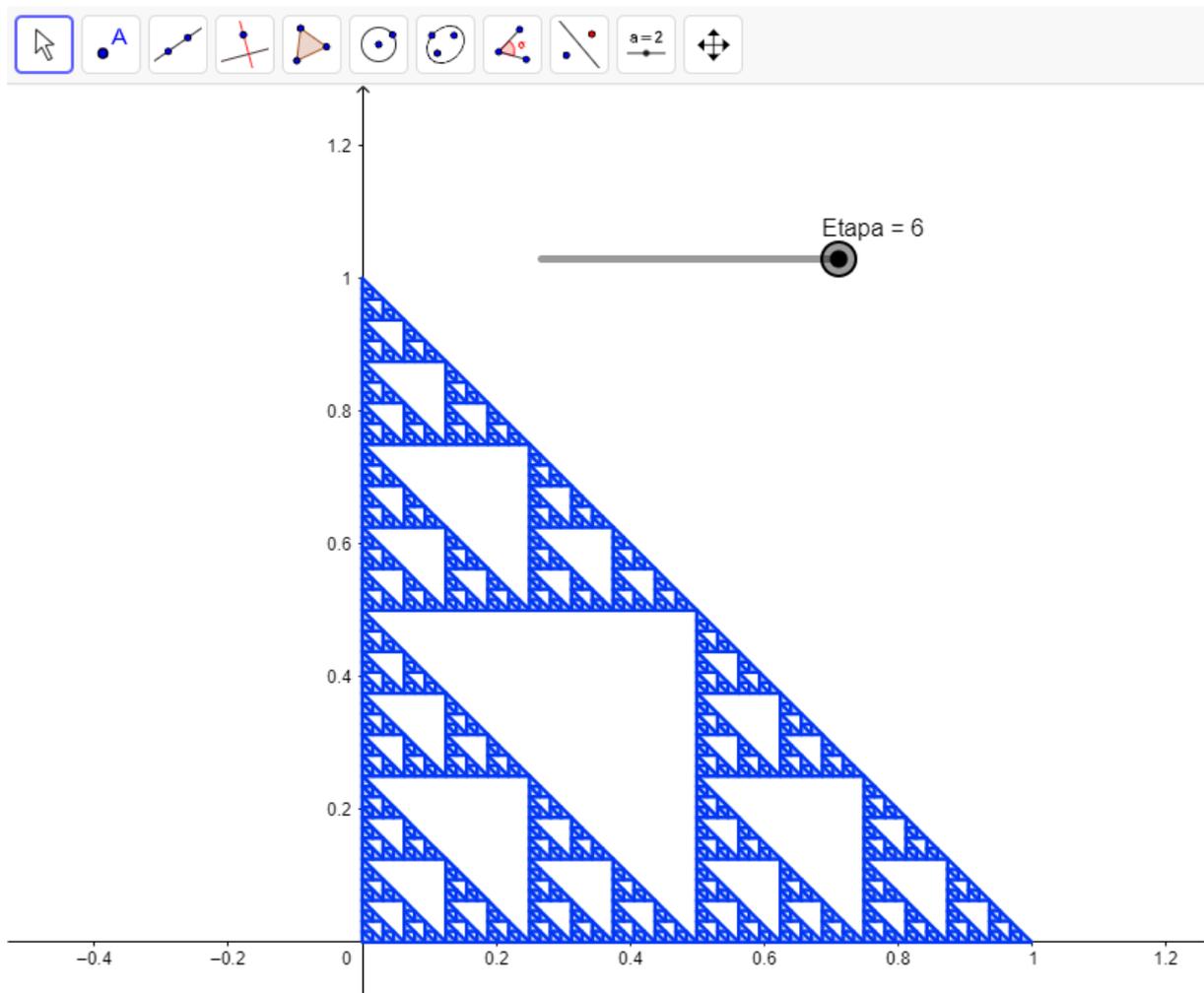
**Etapa 6:** Até esta etapa observamos que o trabalho foi semelhante a todas as etapas anteriores e pode se estender indefinidamente ou até a escolha do programador em GeoGebra. Neste trabalho nos desenvolvemos até a Etapa 6 como pode ser visto na Figura 53.

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$I6 = \text{Sequência (Transladar (Homotetia (15,1/2), L1(I)), i, 1, 3)}$$

Observe o gráfico resultante de  $I6$  pode ser visto na Figura 53

**Figura 53** – Etapa 6: Resultado de aplicar a sequência  $l_6$



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/npjqj3jv>

Para deixar a construção do fractal mais dinâmica, usaremos um controle deslizante que nos permita visualizar os níveis de cada etapa construída. Para isso basta selecionar a opção "Controle Deslizante" ou "Deslizador" na Barra de Ferramentas.

Digitamos as seguintes instruções para o Controle Deslizante do GeoGebra:

onde:

- <Nome> será substituído por: Etapas
- <Mínimo> será substituída por 0;
- <Máximo> será substituído por 6;
- <Incremento> será substituído por 1.

Assim, é necessário ingressar nas "Configurações" do "Controle Deslizante", na opção "Avançado" e digitar no campo "Condição para Exibir Objeto(s)", as seguintes instruções:

- $t_1$  aparecerá quando a Etapas = 0;
- $l_1$  aparecerá quando a Etapas = 1;

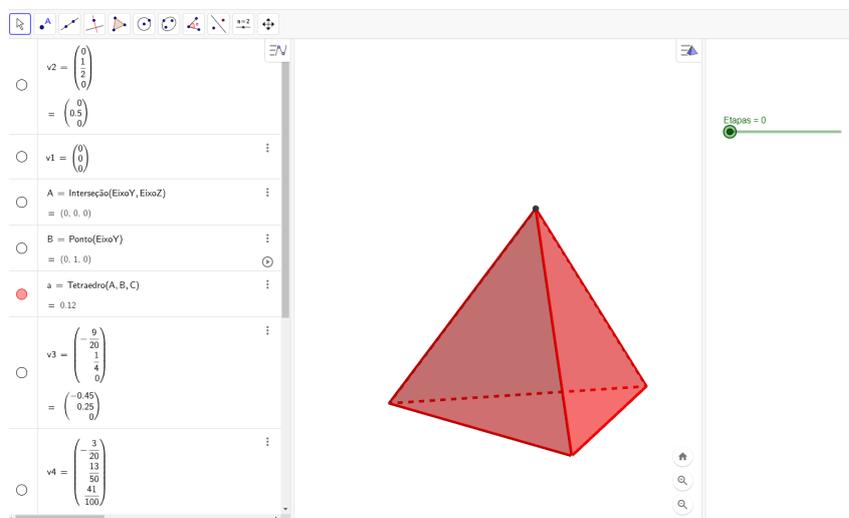
- $l_2$  aparecerá quando a Etapas = 2;
- $l_3$  aparecerá quando a Etapas = 3;
- $l_4$  aparecerá quando a Etapas = 4;
- $l_5$  aparecerá quando a Etapas = 5;
- $l_6$  aparecerá quando a Etapas = 6;

### 4.3 Pirâmide ou Tetraedro de Sierpinski

Para iniciar a construção da Tetraedro de Sierpinski, selecione a Janela de Visualização 3D, em seguida, escolha opção Tetraedro na barra de Ferramenta e depois escolha os pontos  $(0,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ , no plano. Note que na Figura 54, o tetraedro construído é chamado de  $a$ .

Vamos digitar na Janela de Álgebra os quatro vetores que serão usados nas semelhanças que serão aplicadas ao tetraedro construído. Esses vetores são  $v_1 = (0,0,0)^T$ ,  $v_2 = (0, \frac{1}{2}, 0)^T$ ,  $v_3 = (\frac{-9}{20}, \frac{1}{4}, 0)^T$  e  $v_4 = (\frac{-3}{20}, \frac{13}{50}, \frac{41}{100})^T$ .

**Figura 54** – Construções iniciais do Tetraedro de Sierpinski



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/ytcb3sf>

**Etapa 1:** Nesse passo, construímos uma Lista no GeoGebra para realizar as semelhanças dadas pelas Equações (14), (15), (16) e (17). Nomearemos esta lista como  $L = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ .

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_1 \quad (14)$$

$$T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_2 \quad (15)$$

$$T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_3 \quad (16)$$

$$T_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_4 \quad (17)$$

Posteriormente, recomendamos ao leitor substituir a utilização da Janela de Álgebra pelo Campo de Entrada para a digitação dos comandos essenciais para a construção dos fractais, visto que estes podem ser extensos.

Utilizaremos os comandos a seguir:

**Figura 55** – Comandos utilizados na construção do Tetraedro de Sierpinski

Sequência( <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )

Transladar( <Objeto>, <Vetor> )

Homotetia( <Objeto>, <Razão> )

Fonte: GeoGebra

Digitamos no Campo de Entrada do GeoGebra a seguinte instrução:

$P1 = \text{Sequência} ( \langle \text{Expressão} \rangle, \langle \text{Variável} \rangle, \langle \text{Valor Inicial} \rangle, \langle \text{Valor Final} \rangle )$

onde:

- <Expressão> será substituído por: Transladar (Homotetia ( $a, 1/2$ )),  $L(i)$ );
- <Variável> será substituída por  $i$ ;
- <Valor Inicial> será substituído por 1;
- <Valor Final> será substituído por 4.

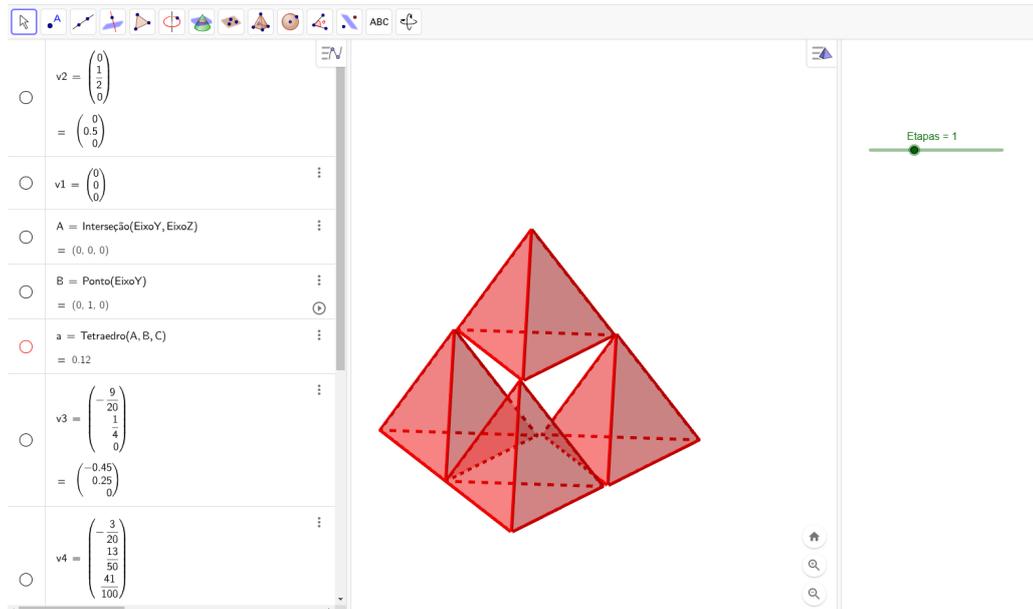
Observe também que no comando <Transladar>

- <Objeto> foi substituído por: Homotetia ( $a, 1/2$ );
- <Vetor> foi substituído por:  $L(i)$ .

No comando <Homotetia>

- <Objeto> foi substituído por:  $a$ ;
- <Razão> foi substituído por  $\frac{1}{2}$ .

O gráfico resultante da instrução de  $P1$ , pode ser visto na Figura 56.

**Figura 56** – Etapa 1: Resultado de aplicar a sequência  $P1$ 

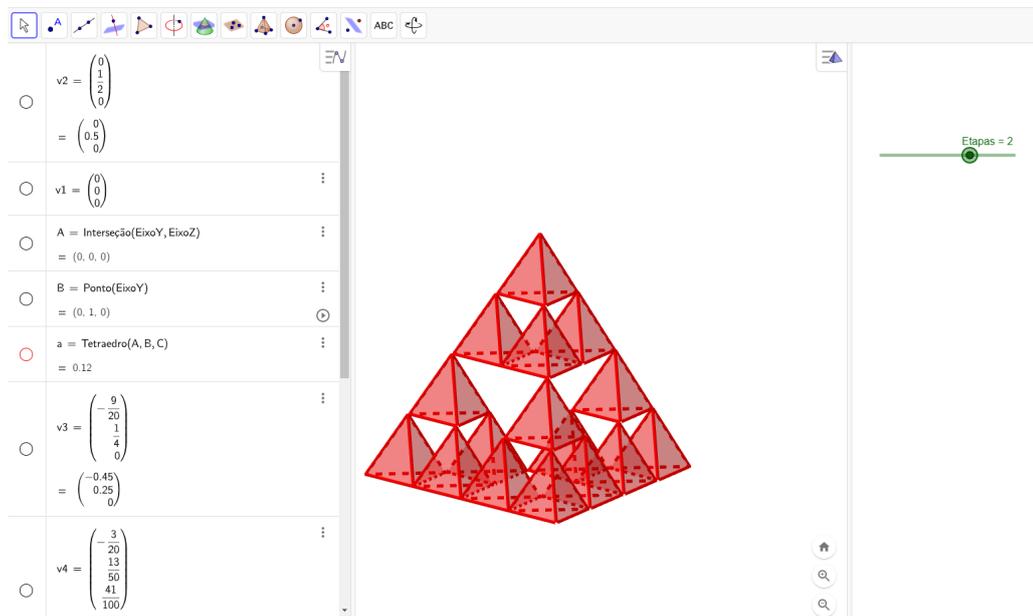
Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/ytcb3sf>

**Etapa 2:** Para graficar a segunda etapa, usaremos uma instrução similar à etapa anterior, com a diferença de que o objeto ao que serão aplicadas as duas semelhanças é  $P1$  e não  $a$ .

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$P2 = \text{Sequência}(\text{Transladar}(\text{Homotetia}(P1, 1/2)), L(i), i, 1, 4)$$

Observe o gráfico resultante de  $P2$ , pode ser visto na Figura 57

**Figura 57** – Etapa 2: Resultado de aplicar a sequência  $P2$ 

Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/ytcb3sf>

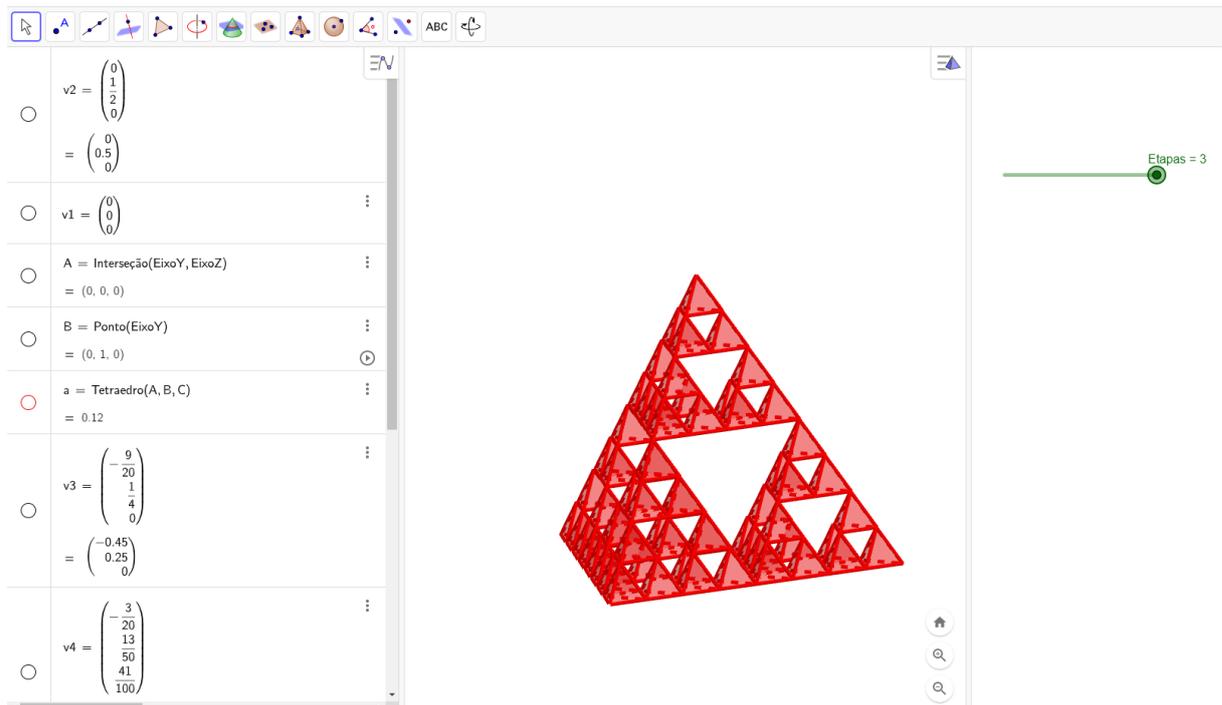
**Etapa 3:** Nesta etapa, usaremos uma instrução semelhante à etapa anterior, com a diferença que o objeto ao que serão aplicadas as quatro semelhanças é  $P2$  que se encontra na Figura 58.

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$P3 = \text{Sequência (Transladar (Homotetia (P2, 1/2), L(i)), i, 1,4).$$

Observe o gráfico resultante de  $P3$  pode ser visto na Figura 58

**Figura 58** – Etapa 3: Resultado de aplicar a sequência  $P3$



**Fonte:** <https://www.geogebra.org/classic/ytcb3sf>

Na construção da próxima etapa, ao digitar o comando no Campo de Entrada, o computador com o processador *intel(R)Pentium(R)CPUN3700@1.60GHz* começou a ficar lento e travando. Por causa disso, decidimos que Tetraedro de Sierpinski seria construída até a etapa 3. Neste trabalho nos desenvolvemos até a Etapa 3 como pode ser visto na Figura 58

Para deixar a construção do fractal mais dinâmica, usaremos um controle deslizante que nos permita visualizar os níveis de cada etapa construída. Para isso basta selecionar a opção "Controle Deslizante" ou "Deslizador" na Barra de Ferramentas.

Para criar esse Controle Deslizante precisamos abrir uma segunda "Janela de Visualização 2D" ou "Janela de Visualização", pois a "Janela de Visualização 3D" não possui essa ferramenta que nos permitir fazer a iteração da figura.

Digitamos as seguintes instruções para o Controle Deslizante do GeoGebra:

onde:

- <Nome> será substituído por: Etapas
- <Mínimo> será substituída por 0;
- <Máximo> será substituído por 3;
- <Incremento> será substituído por 1.

Assim, é necessário ingressar nas "Configurações" do "Controle Deslizante", na opção "Avançado" e digitar no campo "Condição para Exibir Objeto(s)", as seguintes instruções:

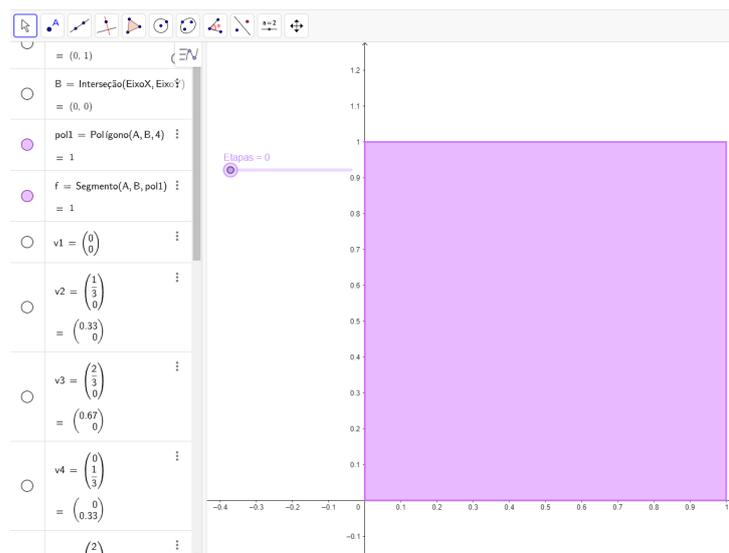
- $a$  aparecerá quando a Etapas = 0;
- $P1$  aparecerá quando a Etapas = 1;
- $P2$  aparecerá quando a Etapas = 2;
- $P3$  aparecerá quando a Etapas = 3;

#### 4.4 Tapete de Sierpinski

Para iniciar a construção, selecione na Barra de Ferramentas a opção "Polígono Regular" e depois clique em dois pontos  $(0,1)$ ,  $(0,0)$  no plano, em seguida, digite o número de vértices que serão 4, estabelecendo um quadrado, veja a Figura 59.

Vamos digitar na Janela de Álgebra os oito vetores que serão usados nas semelhanças que serão aplicadas no quadrado da Figura 59. Esses vetores são  $v_1 = (0,0)^T$ ,  $v_2 = (\frac{1}{3}, 0)^T$ ,  $v_3 = (\frac{2}{3}, 0)^T$ ,  $v_4 = (0, \frac{1}{3})^T$ ,  $v_5 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$ ,  $v_6 = (0, \frac{2}{3})^T$ ,  $v_7 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$  e  $v_8 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ .

**Figura 59** – Construções iniciais do Tapete de Sierpinski



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/kwgnhkqg>

**Etapa 1:** Nesse etapa, construímos uma Lista no GeoGebra para realizar as semelhanças dadas pelas Equações (18), (19), (20), (21), (22), (23), (24) e (25). Nomearemos esta lista como

$$I_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$$

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_1 \quad (18)$$

$$T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_2 \quad (19)$$

$$T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_3 \quad (20)$$

$$T_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_4 \quad (21)$$

$$T_5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_5 \quad (22)$$

$$T_6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_6 \quad (23)$$

$$T_7 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_7 \quad (24)$$

$$T_8 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_8 \quad (25)$$

Posteriormente, recomendamos ao leitor substituir a utilização da Janela de Álgebra pelo Campo de Entrada para a digitação dos comandos essenciais na construção dos fractais, visto que estes podem ser extensos.

Observe que na Figura 59, o quadrado inicial roxo é denominado pelo GeoGebra de *pol1*. Utilizaremos os comandos a seguir:

**Figura 60** – Comandos utilizados na construção do Tapete de Sierpinski

Sequência( <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )

Transladar( <Objeto>, <Vetor> )

Homotetia( <Objeto>, <Razão> )

Fonte:GeoGebra

Digitamos no Campo de Entrada do GeoGebra a seguinte instrução:

$t1 = \text{Sequência} ( \langle \text{Expressão} \rangle, \langle \text{Variável} \rangle, \langle \text{Valor Inicial} \rangle, \langle \text{Valor Final} \rangle )$

onde:

- <Expressão> será substituído por: Transladar (Homotetia ( $pol1,1/3$ )),  $l_1(i)$ );
- <Variável> será substituída por  $i$ ;
- <Valor Inicial> será substituído por 1;
- <Valor Final> será substituído por 8.

Observe também que no comando <Transladar>

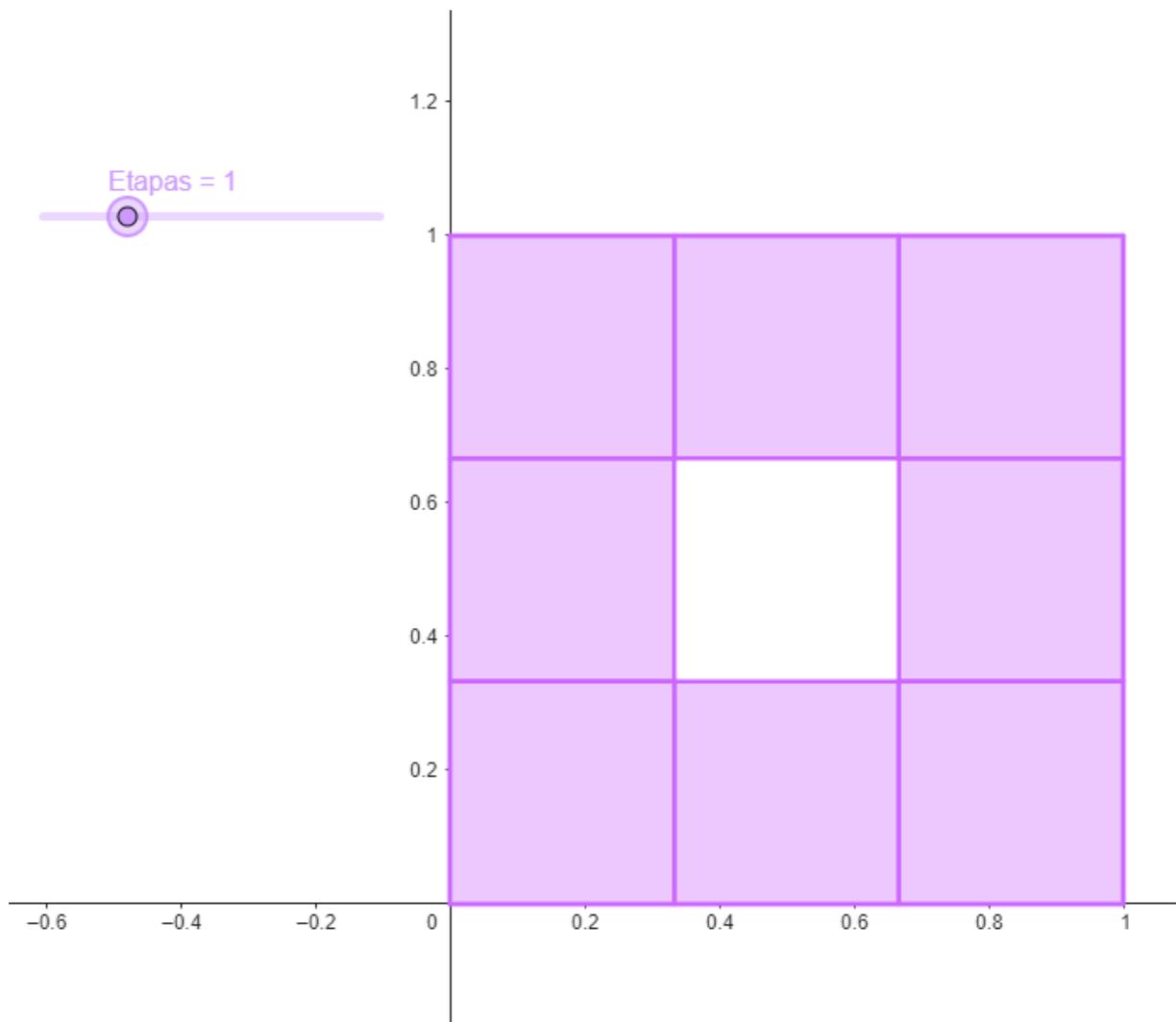
- <Objeto> foi substituído por: Homotetia ( $pol1,1/3$ );
- <Vetor> foi substituído por:  $l_1(i)$ .

No comando <Homotetia>

- <Objeto> foi substituído por:  $pol1$ ;
- <Razão> foi substituído por  $1/3$ .

O gráfico resultante da instrução de  $t_1$ , pode ser visto na Figura 61.

**Figura 61** – Etapa 1: Resultado de aplicar a sequência  $t_1$



**Fonte:** <https://www.geogebra.org/classic/kwgnhkqg>

Observe que o resultado obtido na Figura 61 é a aplicação das oito semelhanças ao

quadrado inicial  $pol1$ .

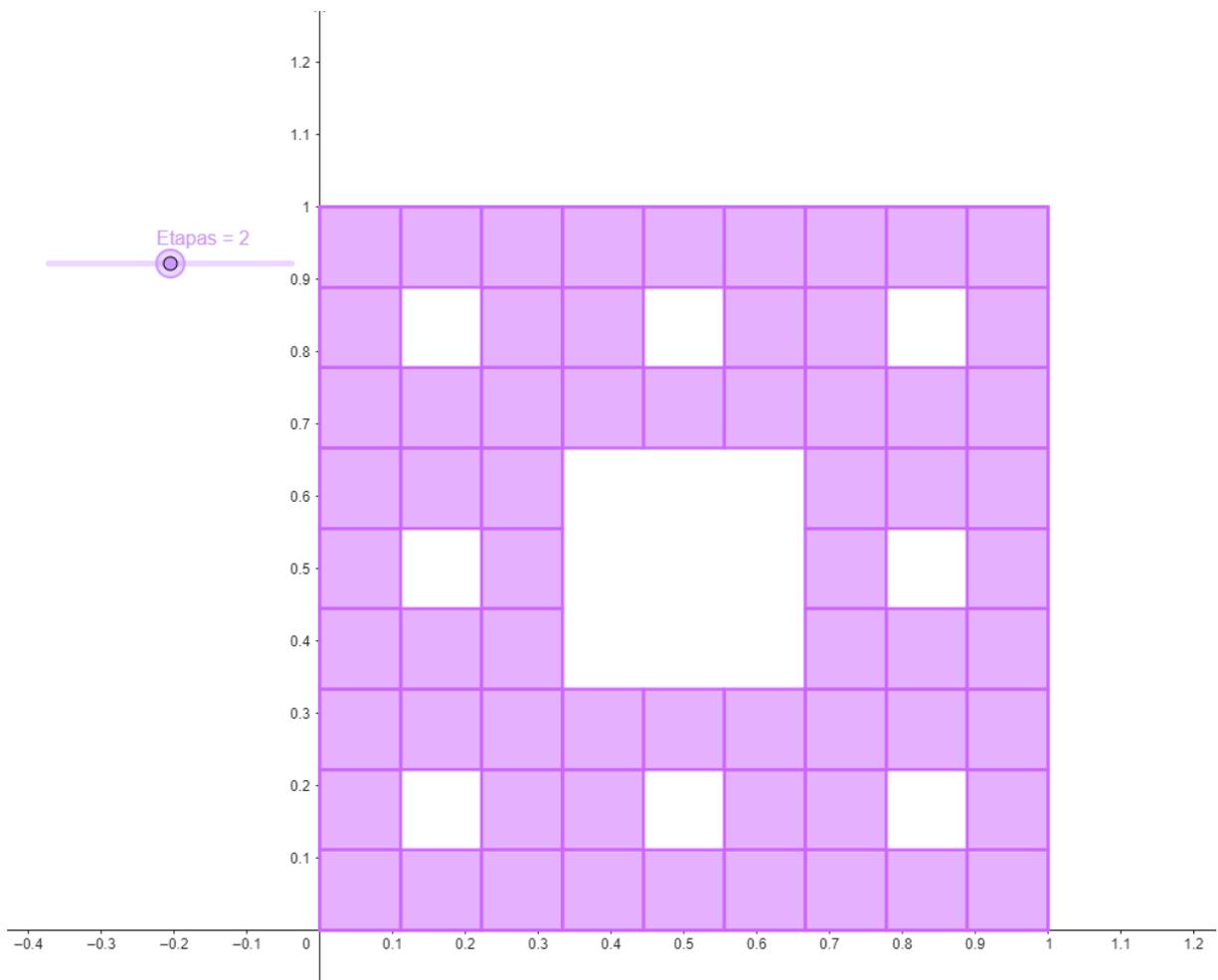
**Etapa 2:** Para graficar a segunda etapa, usamos o objeto  $t1$  dado na Figura 61 e uma instrução similar à etapa anterior, com a diferença de que o objeto ao que serão aplicadas as oito semelhanças é  $t1$  e não  $pol1$ .

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$t2 = \text{Sequência (Transladar (Homotetia (} t1, 1/3)), l1(i)), i, 1, 8)$$

Observe o gráfico resultante de  $t2$ , pode ser visto na Figura 62

**Figura 62** – Etapa 2: Resultado de aplicar a sequência  $t2$



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/kwgnhkqg>

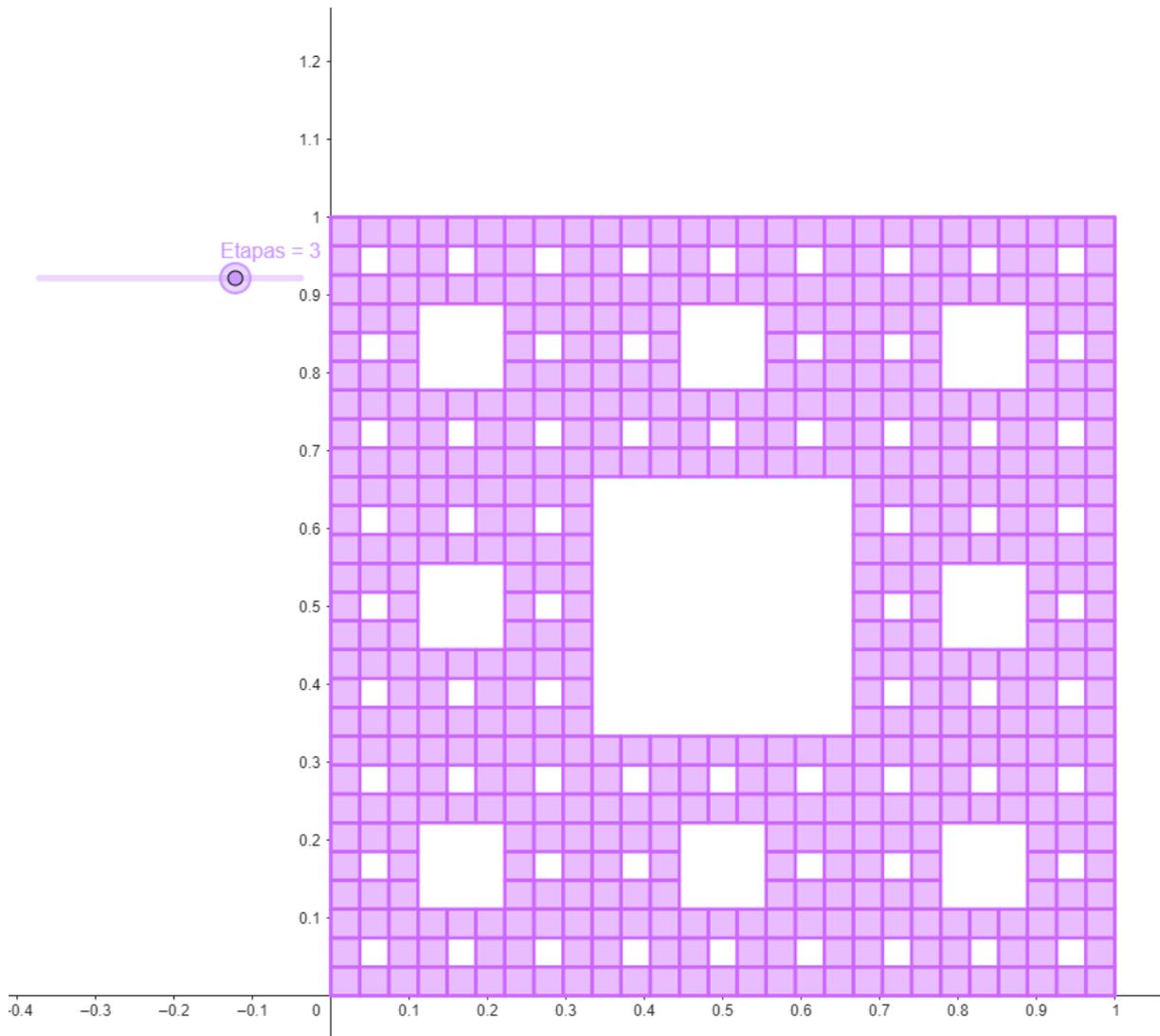
**Etapa 3:** Nesta etapa, usaremos uma instrução semelhante à etapa anterior, com a diferença que o objeto ao que serão aplicadas as oito semelhanças é  $t2$  que se encontra na Figura 62.

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$t3 = \text{Sequência (Transladar (Homotetia (} t2, 1/3), l1(i)), i, 1, 8).$$

Observe o gráfico resultante de  $t3$  pode ser visto na Figura 63

**Figura 63** – Etapa 3: Resultado de aplicar a sequência  $t3$



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/kwgnhkqg>

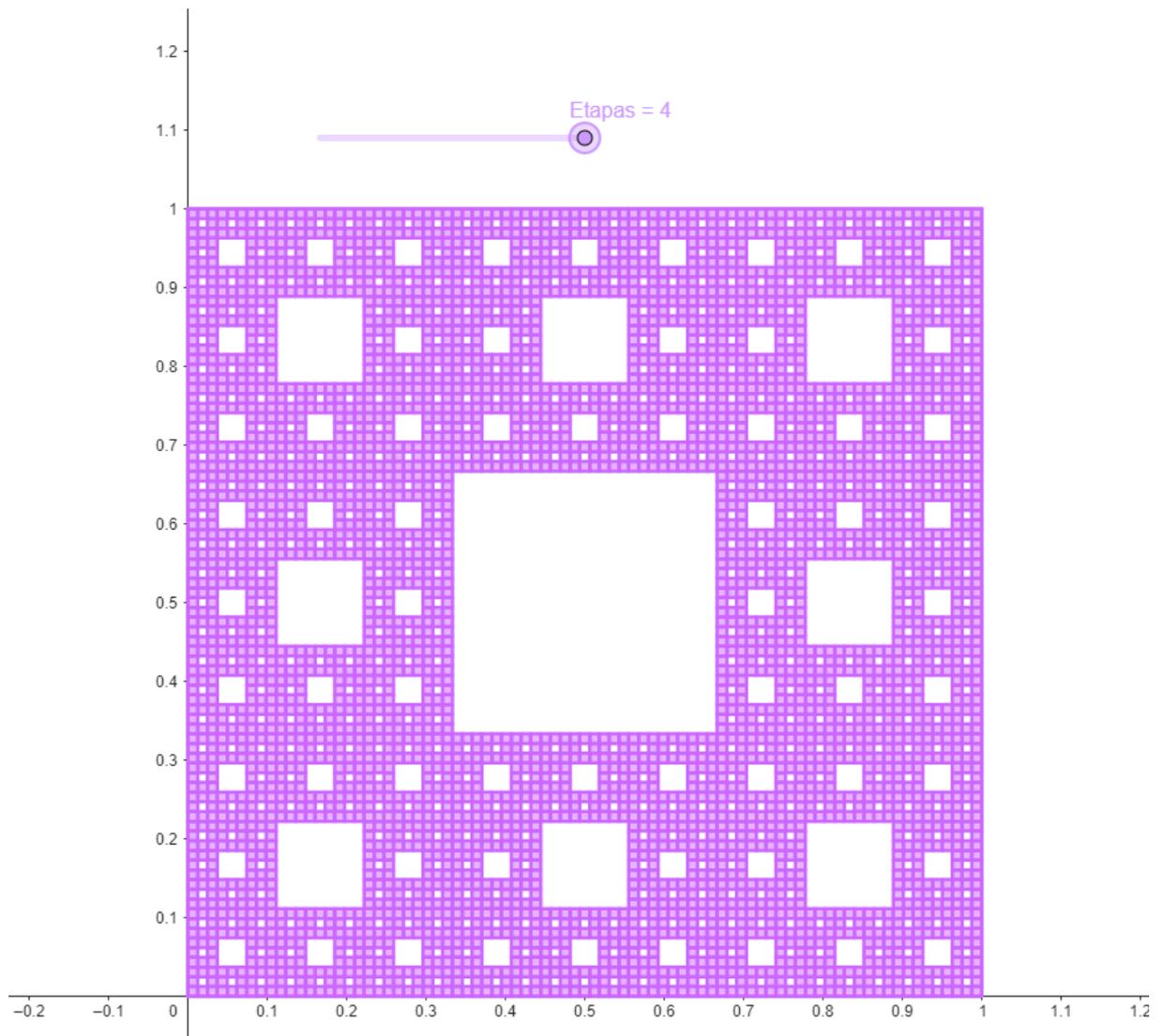
**Etapa 4:** Nesta etapa, usaremos uma instrução semelhante à etapa anterior, com a diferença que o objeto ao que serão aplicadas as oito semelhanças é  $t3$  que se encontra na Figura 63.

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$t4 = \text{Sequência (Transladar (Homotetia (} t3, 1/3), l1(i)), i, 1, 8)$$

Observe o gráfico resultante de  $t4$  pode ser visto na Figura 64.

**Figura 64** – Etapa 4: Resultado de aplicar a sequência  $t_4$



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/kwgnhkqg>

**Etapa 5:** Na construção desta etapa, ao digitar o comando no Campo de Entrada, o computador com processador *intel(R)Pentium(R)CPUN3700@1.60GHz* começou a ficar lento e travando que tivemos que fechar a janela que estava aberta, por causa disso decidimos que o Tapete de Sierpinski seria construído somente até a etapa 4. Neste trabalho nos desenvolvemos até a Etapa 4 como pode ser visto na Figura 63.

Para deixar a construção do fractal mais dinâmica, usaremos um controle deslizante que nos permita visualizar os níveis de cada etapa construída. Para isso basta selecionar a opção "Controle Deslizante" ou "Deslizador" na Barra de Ferramentas.

Digitamos as seguintes instruções para o Controle Deslizante do GeoGebra:

onde:

- <Nome> será substituído por: Etapas

- <Mínimo> será substituída por 0;
- <Máximo> será substituído por 4;
- <Incremento> será substituído por 1.

Assim, é necessário ingressar nas "Configurações" do "Controle Deslizante", na opção "Avançado" e digitar no campo "Condição para Exibir Objeto(s)", as seguintes instruções:

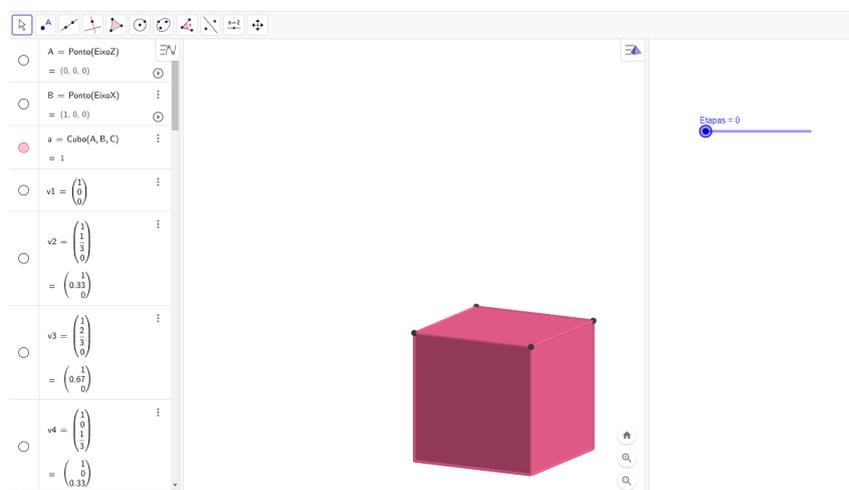
- $pol1$  aparecerá quando a Etapas = 0;
- $t1$  aparecerá quando a Etapas = 1;
- $t2$  aparecerá quando a Etapas = 2;
- $t3$  aparecerá quando a Etapas = 3;
- $t4$  aparecerá quando a Etapas = 4;

#### 4.5 Esponja de Menger

Para iniciar a construção da Esponja de Menger, selecione a Janela de Visualização 3D, em seguida, escolha opção Cubo na barra de Ferramenta e depois escolha os pontos  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ , no plano. Note que na Figura 65, o cubo construído é chamado de  $a$ .

Vamos digitar na Janela de Álgebra os vinte vetores que serão usados nas semelhanças que serão aplicadas no segmento construído. Esses vetores são  $v_1 = (0, 0, 0)^T$ ,  $v_2 = (0, \frac{1}{3}, 0)^T$ ,  $v_3 = (1, \frac{2}{3}, 0)^T$ ,  $v_4 = (1, 0, \frac{1}{3})^T$ ,  $v_5 = (1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$ ,  $v_6 = (1, 0, \frac{2}{3})^T$ ,  $v_7 = (1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$ ,  $v_8 = (1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ ,  $v_9 = (\frac{2}{3}, 0, 0)^T$ ,  $v_{10} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0)^T$ ,  $v_{11} = (\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})^T$ ,  $v_{12} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ ,  $v_{13} = (\frac{1}{3}, 0, 0)^T$ ,  $v_{14} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)^T$ ,  $v_{15} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)^T$ ,  $v_{16} = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})^T$ ,  $v_{17} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$ ,  $v_{18} = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})^T$ ,  $v_{19} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$  e  $v_{20} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ .

**Figura 65** – Construções iniciais da Esponja de Menger



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/twsmu7dp>

**Etapa 1:** Nesse passo, construímos uma Lista no GeoGebra para realizar as semelhanças dadas pelas Equações (26), (27), (28), (29), (30), (31), (32), (33), (34), (35), (36),(37), (38), (39),(40),(41), (42), (43), (44) e (45). Nomearemos esta lista como  $L_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$ .

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_1 \quad (26)$$

$$T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_2 \quad (27)$$

$$T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_3 \quad (28)$$

$$T_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_4 \quad (29)$$

$$T_5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_5 \quad (30)$$

$$T_6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_6 \quad (31)$$

$$T_7 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_7 \quad (32)$$

$$T_8 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_8 \quad (33)$$

$$T_9 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_9 \quad (34)$$

$$T_{10} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_{10} \quad (35)$$

$$T_{11} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_{11} \quad (36)$$

$$T_{12} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_{12} \quad (37)$$

$$T_{13} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_{13} \quad (38)$$

$$T_{14} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_{14} \quad (39)$$

$$T_{15} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_{15} \quad (40)$$

$$T_{16} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_{16} \quad (41)$$

$$T_{17} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_{17} \quad (42)$$

$$T_{18} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_{18} \quad (43)$$

$$T_{19} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_{19} \quad (44)$$

$$T_{20} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v_{20} \quad (45)$$

Posteriormente, recomendamos ao leitor substituir a utilização da Janela de Álgebra pelo Campo de Entrada para a digitação dos comandos essenciais para a construção dos fractais, visto que estes podem ser extensos.

Utilizaremos os comandos a seguir:

**Figura 66** – Comandos utilizados na construção da Esponja de Menger

Sequência( <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )

Transladar( <Objeto>, <Vetor> )

Homotetia( <Objeto>, <Razão> )

Fonte:GeoGebra

Digitamos no Campo de Entrada do GeoGebra a seguinte instrução:

$E1 = \text{Sequência} ( \langle \text{Expressão} \rangle, \langle \text{Variável} \rangle, \langle \text{Valor Inicial} \rangle, \langle \text{Valor Final} \rangle )$

onde:

- <Expressão> será substituído por: Transladar (Homotetia ( $a, 1/3$ )),  $L1(i)$ );
- <Variável> será substituída por  $i$ ;
- <Valor Inicial> será substituído por 1;
- <Valor Final> será substituído por 20.

Observe também que no comando <Transladar>

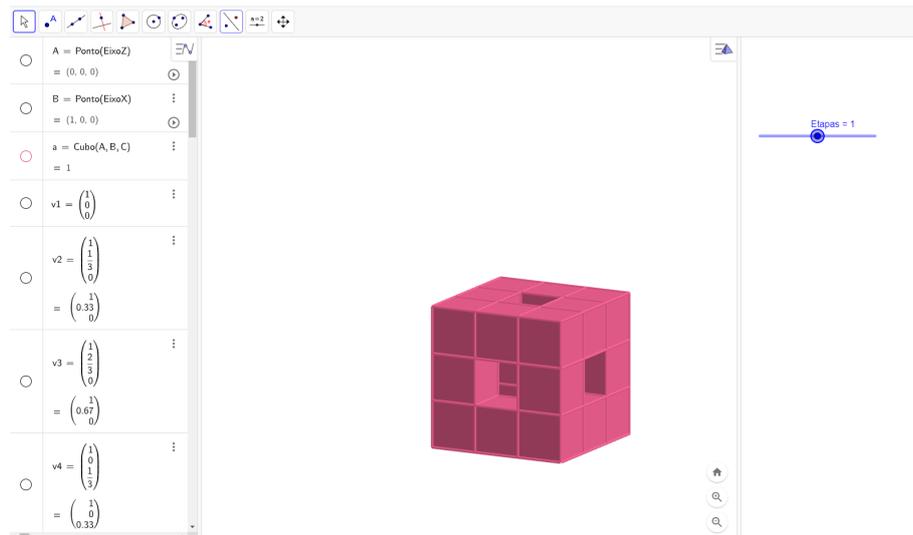
- <Objeto> foi substituído por: Homotetia ( $a, 1/3$ );
- <Vetor> foi substituído por:  $L1(i)$ .

No comando <Homotetia>

- <Objeto> foi substituído por:  $a$ ;
- <Razão> foi substituído por  $\frac{1}{3}$ .

O gráfico resultante da instrução de  $E1$ , pode ser visto na Figura 67.

**Figura 67** – Etapa 1: Resultado de aplicar a sequência  $E1$



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/twsmu7dp>

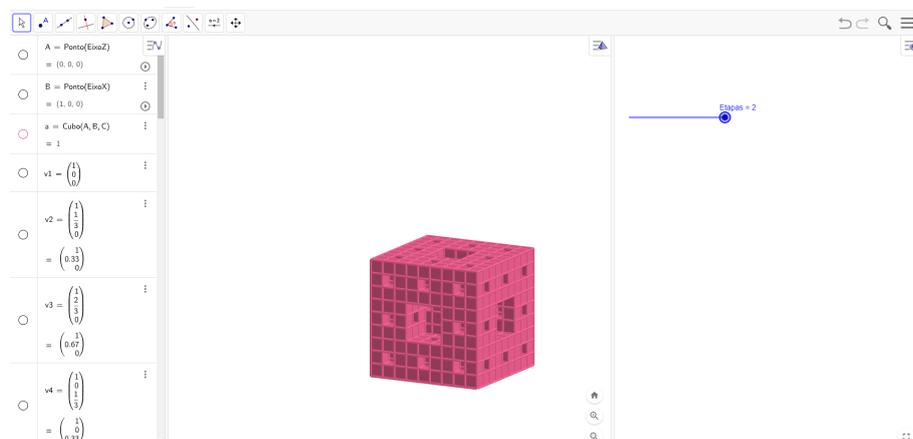
**Etapa 2:** Para graficar a segunda etapa, usaremos uma instrução similar à etapa anterior, com a diferença de que o objeto ao que serão aplicadas as duas semelhanças é  $E1$  e não  $a$ .

A instrução que digitamos no Campo de Entrada é a seguinte:

$$E2 = \text{Sequência (Transladar (Homotetia (E1, 1/3)), L1(i)), i, 1, 20)$$

Observe o gráfico resultante de  $E2$ , pode ser visto na Figura 68

**Figura 68** – Etapa 2: Resultado de aplicar a sequência  $E2$



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/twsmu7dp>

Na construção da próxima etapa, ao digitar o comando no Campo de Entrada, o computador com o processador *intel(R) Pentium(R) CPU N3700 1.60 GHz* começou a ficar lento e travando, que tivemos que fechar a janela aberta. Por causa disso, decidimos que Esponja de Menger seria construída até a etapa 2. Neste trabalho nos desenvolvemos até a Etapa 2 como pode ser visto na Figura 68

Para deixar a construção do fractal mais dinâmica, usaremos um controle deslizante que nos permita visualizar os níveis de cada etapa construída. Para isso basta selecionar a opção "Controle Deslizante" ou "Deslizador" na Barra de Ferramentas.

Para criar esse Controle Deslizante precisamos abrir uma segunda "Janela de Visualização 2D" ou "Janela de Visualização", pois a "Janela de Visualização 3D" não possui essa ferramenta que nos permitir fazer a iteração da figura.

Digitamos as seguintes instruções para o Controle Deslizante do GeoGebra:

onde:

- <Nome> será substituído por: Etapas
- <Mínimo> será substituída por 0;
- <Máximo> será substituído por 2;
- <Incremento> será substituído por 1.

Assim, é necessário ingressar nas "Configurações" do "Controle Deslizante", na opção "Avançado" e digitar no campo "Condição para Exibir Objeto(s)", as seguintes instruções:

- $a$  aparecerá quando a Etapas = 0;
- $E1$  aparecerá quando a Etapas = 1;
- $E2$  aparecerá quando a Etapas = 2;

Assim, apresentaremos os resultados fundamentais obtidos, destacado o fator de redução  $s$  e quantos vetores de deslocamento foram necessários para a construção de cada fractal do Tipo Remoção, como mostra a tabela 4.5.

Fractais do Tipo Remoção	Fator de Redução (s)	Vetores de Deslocamento
Conjunto de Cantor	$\frac{1}{3}$	2
Triângulo de Sierpinski	$\frac{1}{2}$	3
Tetraedro de Sierpinski	$\frac{1}{2}$	4
Tapete de Sierpinski	$\frac{1}{3}$	8
Esponja de Menger	$\frac{1}{3}$	20

## 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A informática no ensino de matemática tem sido tendência na atualidade, propiciando ao docente fazer ligação das propriedades existentes na Álgebra e Geometria com a Tecnologia. Por esse motivo, decidimos combinar o software GeoGebra como uma alternativa da aplicabilidade na construção de fractais. Observamos que, a partir da criação de construções de fractais em forma de arte dinâmica, poderíamos relacionar conhecimentos matemáticos que estão presentes ao nosso redor. Além disso, proporciona ao estudante estabelecer conceitos geométricos para a representação no plano e no espaço.

Dentre os resultados obtidos neste trabalho foi importante a compreensão do que são fractais, e no que refere aos seus elementos abstratos, destacando as características de irregularidades, autos-semelhança, complexidade da estrutura e o grau de detalhamento. Contudo, é de extrema importância o conhecimento sobre os comandos utilizados para a elaboração de cada objeto, oportunizando ao leitor um manual de instruções sobre criação de cada fractal do tipo Remoção como Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski e Tapete de Sierpinski e os enigmáticos que podem ser construído na Janela de Visualização 3D, sendo a Esponja de Menger e Pirâmide de Sierpinski.

Considerando, os aspectos apresentados nesta pesquisa, acreditamos que é possível combinar uma ferramenta tecnológica no ensino de fractais, mas alertamos que, no decorrer dos desenvolvimentos de algumas construções, o processador do computador pode não suportou os comandos de alguns etapas. As construções detalhadas no Capítulo 4 servem como manual para conhecimento e orientação do usuário.

Nesse sentido, o uso do Software GeoGebra no ensino de propriedades matemáticas é eficaz, levando o estudante a raciocinar e aprender de forma dinâmica e construtiva. O GeoGebra é um aplicativo que só tem a contribuir, além de viabilizar uma diversidade de ferramentas e possibilidades de visualização de construções.

A partir das construções realizadas na Seção 4, se compreende que o ensino da Matemática com o uso de recursos tecnológicos como o software GeoGebra no ensino de fractais do tipo Remoção só tem a contribuir para a aprendizagem dos alunos em licenciatura em Matemática ou usuário da plataforma. Como trabalhos futuros recomendamos o uso do GeoGebra para a construção de outros tipos de fractais como ser, do tipo Ramificação, do tipo Árvore e do tipo Dürer.

## REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. [S.l.]: Bookman Porto Alegre, 2001. v. 8.
- BARBOSA, R. M. **Descobrimo a Geometria Fractal-para a sala de aula**. [S.l.]: Autêntica, 2016.
- BARREIRAS, C. d. P. M. **O conjunto de cantor**. 2011. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Évora, 2011.
- BORBÓN, A. **Manual para Geogebra**. *Revista Digital Matemática, Educacion e Internet. Escuela de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica*, v. 12, n. 10, 2012.
- CAMPOS, F. A. D.; FAGUNDES, M. **OS FRACTAIS QUE NOS RODEIAM**. 2018. Disponível em: <<https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/emapem/2018/paper/view/194>>. Acesso em: 30 Out. 2022.
- FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 1971.
- GOMES, A. D. S. **Curso de Especialização para professores de matemática**. 2007. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2007.
- MANDELBROT, B. **Objectos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão**. [S.l.]: Gradiva, 1998.
- MORAN, J. M. **Desafios na comunicação pessoal: gerenciamento integrado da comunicação pessoal, social e tecnológica**. [S.l.]: São Paulo: Paulinas., 2007.
- MOREIRA, A. F. B. Os parâmetros curriculares nacionais em questão. *Educação & Realidade*, v. 21, n. 1, 1996.