



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
FACULDADE DE FÍSICA  
CURSO DE FÍSICA

Sheila A. Garcia Santos

# **Estudo de Sistemas Quânticos Emaranhados**

Marabá  
2013

Sheila A. Garcia Santos

# **Estudo de Sistemas Quânticos Emaranhados**

Monografia apresentada ao Curso de Física da UFPA,  
como requisito parcial para a obtenção do grau de  
Licenciado em Física.

**Orientador: Edney Ramos Granhen**

**Doutor**

Marabá

2013

Santos, Sheila A. Garcia

Estudo de Sistemas Quânticos Emaranhados / Sheila A. Garcia

Santos - 2013

80.p

1.Mecânica Quântica. 2.Emaranhamento Quântico.. I.Título.

CDD 530.12



Serviço Público Federal  
Universidade Federal do Pará  
Campus Universitário de Marabá  
Faculdade de Física

### ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ao vigésimo nono (29) dia do mês de Agosto de 2013 (dois mil e treze), na cidade de Marabá, no estado do Pará, reuniu-se a banca avaliadora, composta pelos membros descritos abaixo, para assistirem à defesa do Trabalho de Conclusão de Curso – TCC, intitulado: “**ESTUDOS DOS SISTEMAS QUÂNTICOS EMARANHADOS**”, elaborado pela discente **Sheila Adrienne Garcia Santos**, onde após a apresentação e arguição pela banca da monografia, a mesma tem como opinião unânime atribuir o conceito EXCELENTE, ao referido trabalho.

Prof. Dr. Edney Ramos Graphen

*Orientador*

Prof. Dr. Antônio Sergio Magalhães de Castro

*Membro da banca*

Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves

*Membro da banca*

*... aos meus amores!*

## Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Moises de Jesus Sousa Santos e Raimunda de Jesus Garcia Santos, e aos meus irmãos, Shirley Andréa Garcia Santos e Sérgio Rycardo Garcia Santos, por todo o carinho e amor. Agradeço ao meu grande amigo, amor e companheiro, Jonathan Mendes Pereira, com quem sempre troquei ideias sobre diversos assuntos, incluindo a Física e a Matemática. Gostaria de agradecer ainda a minha querida amiga e sogra, Iracy Mendes Pereira, pelos cuidados, preocupações e conselhos dados a mim, por quem guardo um amor de mãe. Também agradeço às minhas amigas e irmãs de coração, Juciara Lima Melo e Maria Antônia Guimarães, amores que conquistei durante esses anos de Pará. Agradeço a amiga Regina Costa Nunes Andrade que, mesmo não sendo da área da Física, doou parte do seu tempo na revisão deste trabalho.

Gostaria de agradecer também ao meu orientador Prof. Dr. Edney Ramos Granhen, pelas reuniões (muitas dessas realizadas nas tardes e noites de sábado!), conselhos e conversas. Também agradeço ao Prof. Dr. Reinhold Bertlmann, da Universidade de Viena, cuja ajuda (via e-mail e muito receptiva e calorosa) foi de suma importância para compreensão da Entropia de Von Neumann em Sistemas Bipartite. Não posso deixar de citar a grande amiga da Física 2009 que consegui conquistar, Raiane Sodré de Araújo, que admiro muito. Agradeço também aos amigos da Física 2009, em especial Milton Severino da Silva Júnior, e aos professores da Faculdade de Física por estes quatro anos de curso e pelos momentos de estudo e descontração.

Por fim, agradeço ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo suporte material oferecido em livros e notebook, ferramentas essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

*“O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano.”*

*(Issac Newton)*

*“A tarefa é, não tanto para ver o que ninguém viu ainda, mas pensar o que ninguém ainda pensou, sobre o que todo mundo vê.”*

*(Erwin Schrödinger)*

## Resumo

O Emaranhamento Quântico é um fenômeno determinante para a interpretação de algumas das peculiaridades da Mecânica Quântica. O estudo desse fenômeno se originou a partir dos questionamentos dos físicos Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen, que resultaram no chamado Paradoxo EPR. Com os avanços nos estudos sobre o Emaranhamento Quântico, surgiram várias possibilidades para sua aplicação, principalmente nos campos da Teoria da Informação Quântica, Óptica Quântica e Física Estatística. O presente trabalho explora a teoria do Emaranhamento Quântico, dando ênfase aos estados quânticos bipartidos. Inicialmente, abordamos os aspectos históricos que culminaram com a noção de emaranhamento nos estados quânticos compostos. Em seguida, a interpretação matemática de Emaranhamento Quântico é apresentada em detalhe, assim como sua relação com sistemas compostos e suas principais propriedades. São apresentados os principais qualificadores e quantificadores de emaranhamento em sistemas quânticos bipartites em destaque na literatura atual. Além disso, são demonstrados alguns exemplos da aplicação desses qualificadores e quantificadores nos estados de Bell, exemplos de estados genuinamente emaranhados. Finalmente, é apresentada uma síntese dos principais pontos que caracterizam os sistemas quânticos bipartites emaranhados. Onde também é dado destaque as características comuns entre os qualificadores e quantificadores abordados neste trabalho.

**Palavras-chave:** Emaranhamento Quântico. Sistemas Quânticos Bipartites. Qualificadores e Quantificadores.



# Abstract

The Quantum Entanglement phenomenon plays a decisive role in the interpretation of the peculiarities of the Quantum Mechanics. The study of this phenomenon began with the questionings made by the physicists Albert Einstein, Boris Podolsky and Nathan Rosen, which resulted in the so called EPR Paradox. With the advances in the studies on Quantum Entanglement, many application possibilities came out, especially in the fields of Quantum Information Theory, Quantum Optics and Statistical Physics. The present work explores the Quantum Entanglement Theory, emphasizing bipartite states. First, we approach historical aspects which culminated with the notion of entanglement in composite quantum states. Next, the mathematical interpretation of quantum entanglement is presented in detail, as well as its relation with composite systems and their properties. The main entanglement qualifiers and quantifiers in bipartite systems present in the recent literature are presented. In addition, some examples are shown of applying these qualifiers and quantifiers in Bell states examples of truly entangled state. Finally, it is presented a synthesis of the main points that characterize the entangled bipartite systems. We also highlight the common characteristics of the qualifiers and quantifiers approached in this work.

**Keywords:** Quantum Entanglement. Bipartite Quantum Systems. Qualifiers and Quantifiers.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>8</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2 Aspectos Históricos do Emaranhamento</b>	<b>12</b>
2.1 O Paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen . . . . .	12
2.2 O Paradoxo EPR para Bohr . . . . .	16
2.3 O Paradoxo EPR para Schrödinger . . . . .	17
2.4 O Paradoxo EPR para Bohm . . . . .	18
2.5 O Paradoxo EPR para Bell . . . . .	20
<b>3 Emaranhamento em Sistemas Bipartite</b>	<b>25</b>
3.1 Sistemas Compostos e Emaranhamento Quântico . . . . .	25
3.2 Emaranhamento Bipartite . . . . .	27
3.3 Qualificadores de Emaranhamento . . . . .	29
3.3.1 Operador densidade reduzido . . . . .	29
3.3.2 Decomposição de Schmidt . . . . .	31
3.3.3 Critério PPT . . . . .	33
3.3.4 Critério de Horodecki . . . . .	35
3.3.5 Critério CCNR . . . . .	37
3.3.6 Testemunha de Emaranhamento . . . . .	40
3.4 Explorando a separabilidade . . . . .	45
<b>4 Quantificadores de Emaranhamento</b>	<b>50</b>
4.1 Requisitos para bons quantificadores . . . . .	50

4.2	Entropia de von Neumann . . . . .	52
4.3	Concorrência . . . . .	55
4.4	Negatividade . . . . .	57
4.5	Explorando os quantificadores . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>61</b>
<b>A</b>	<b>Pré-requisitos ao Emaranhamento</b>	<b>64</b>
A.1	O vetor de estado . . . . .	64
A.2	O operador densidade . . . . .	67
A.3	Transformações unitárias . . . . .	70
<b>B</b>	<b>Estados gaussianos bipartites</b>	<b>72</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

## Lista de Figuras

3.1	Representação do espaço de fases ou espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ . . . . .	25
3.2	O observável $\mathcal{W}$ é uma testemunha de emaranhamento para o estado $\rho$ . . .	42
3.3	Comparação entre duas testemunhas de emaranhamento. . . . .	43

# 1 Introdução

O Emaranhamento Quântico, uma das propriedades mais fascinantes da Mecânica Quântica, é, definitivamente, um fenômeno decisivo para a divisão entre o mundo clássico e o quântico, como o próprio Erwing Schrödinger sugere em seu artigo de 1935 [1]:

Eu chamaria isso não de *uma* mas de *a* marca característica da Mecânica Quântica, aquela que força um rompimento completo com as linhas clássicas de pensamento. Através da interação de dois representantes (ou funções  $\psi$ ) os sistemas se tornaram emaranhados.

Atualmente, o Emaranhamento Quântico é uma das propriedades físicas mais estudadas, o que ocorre não somente devido à estranheza representada pela sua natureza, mas toda essa procura pela compreensão desse fenômeno (que foi motivante para o seu estudo e posterior desenvolvimento desta monografia), se deve ao fato dele representar o alicerce para o desenvolvimento da Teoria da Informação Quântica e por sua aplicação em várias ciências, além da Física, como a Química e a Biologia.

Em Teoria da Informação Quântica, esta propriedade quântica é utilizada objetivando dar mais segurança e confiabilidade ao processamento e transmissão das informações<sup>1</sup>. Alguns exemplos de aplicação da Teoria da Informação Quântica mais conhecidos são a Computação Quântica, a Criptografia Quântica e o Teletransporte Quântico. Dentro da Biologia, o emaranhamento é utilizado na explicação de vários fenômenos biológicos, como a fotossíntese e o processo de orientação geográfica dos pássaros migratórios<sup>2</sup>. Em Física, o emaranhamento é utilizado para a explicação de muitos fenômenos

---

<sup>1</sup> Para mais informações sobre os estudos do emaranhamento na Teoria da Informação Quântica consulte: GALINDO, A.; MARTÍN-DELGADO, M. A. *Information and Computation: Classical and Quantum Aspects*. Rev. Mod. Phys., 74:347, 2002. e SOMMA, R.; et al. *Nature and Measure of Entanglement in Quantum Phase Transitions*. Phys. Rev. A, :042311,2004.

<sup>2</sup> Para mais informações sobre os estudos do emaranhamento nesses fenômenos biológicos consulte: BALL, P. *The Dawn of Quantum Biology*. Nature, 474:272, 2011. e Vedral, V. *Life in a Quantum World*. Scientific American Brazil, 110:30, 2011.

---

dentro de vários ramos dessa ciência, como: a Óptica Quântica, com, por exemplo, o emaranhamento dos feixes de luz<sup>3</sup>, e a Física da Matéria Condensada, por exemplo, dentro do processo de desenvolvimento da microestrutura da pasta de cimento durante a hidratação<sup>4</sup>.

Esta monografia tem por objetivo apresentar uma introdução aos estudos do Emaranhamento Quântico, tendo como foco principal os sistemas bipartites, explorando os aspectos históricos relativos ao tema, assim como as características compreendidas por esse fenômeno físico e as ferramentas matemáticas utilizadas para o seu estudo. A ênfase dada aos sistemas bipartites em nosso estudo se justifica devido aos avanços já alcançados nas pesquisas com este tipo de sistema, como veremos no Capítulo 3. Antes de darmos andamento ao desenvolvimento deste trabalho, visando uma compreensão mais sólida do Emaranhamento Quântico, achamos necessário que o leitor faça a revisão dos postulados fundamentais da Mecânica Quântica. Para tanto, recomendamos a leitura do Capítulo III da referência [2], cujo estudo foi essencial para o entendimento dos conceitos aqui abordados e posterior desenvolvimento desta monografia. Este trabalho foi dividido em quatro capítulos, como descrito a seguir.

O Capítulo 2 fornece um embasamento histórico sobre as discussões que culminaram com o desenvolvimento dos estudos sobre o emaranhamento quântico. No Capítulo 3 serão apresentadas algumas definições sobre sistemas compostos, a sua relação com o emaranhamento, assim como o emaranhamento em sistemas bipartites, além dos critérios identificadores de emaranhamento mais discutidos na literatura atual, os chamados qualificadores de emaranhamento. No Capítulo 4, serão abordadas as principais características que definem um bom quantificador de emaranhamento, assim como os quantificadores de emaranhamento mais conhecidos atualmente. Ao fim dos Capítulos 3 e 4, apresentaremos uma seção de exemplos de aplicação dos qualificadores e quantificadores de emaranhamento estudados nos respectivos capítulos empregados aos estados de Bell, estados conhecidos por seu emaranhamento genuíno. Por fim, no Capítulo 5 serão apresentadas as considerações finais deste trabalho, onde faremos uma síntese dos principais aspectos que caracterizam os sistemas quânticos bipartite emaranhados, assim como apontaremos as

---

<sup>3</sup> Para mais informações sobre esse assunto consulte: VILLAR, A.S. *Emaranhamento Multicolor entre Feixes Intensos de Luz*. Tese de Doutorado apresentada à Universidade de São Paulo, 2007.

<sup>4</sup> Para mais informações sobre os estudos do emaranhamento nesses fenômeno consulte: COUTINHO, J.S. *Ciência de Materiais: Ligantes e agregados*. Universidade do Porto, 2002.

---

características comuns entre qualificadores abordados neste trabalho, bem como entre os quantificadores.

Conforme o que será abordado no Capítulo 2, em um artigo publicado em 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen demonstraram sua conclusão que a Mecânica Quântica é uma teoria incompleta devido a certas características incomuns, resultando no chamado *Paradoxo EPR*. No entanto, como veremos, vários físicos comprovaram que esse caráter incomum da Mecânica Quântica se deve ao Emaranhamento Quântico. Mesmo tendo se passado quase 80 anos desde a publicação do paradoxo EPR, ainda existem muitas barreiras a serem quebradas nos estudos do emaranhamento, pois ainda há dificuldades em identificar e medir o emaranhamento em sistemas quânticos. Ao longo deste trabalho apresentaremos alguns dos motivos que levam a essas dificuldades no estudo desses tipos de sistemas.

## 2 Aspectos Históricos do Emaranhamento

O desenvolvimento da Mecânica Quântica se deve, principalmente, às várias discussões acerca da sua natureza. Dois grandes protagonistas nessas discussões foram Albert Einstein, que não aceitava certos aspectos da natureza quântica dos fenômenos, e Niels Bohr, um grande defensor da teoria. Einstein, com seus questionamentos, chegou a desafiar praticamente quase todos os colaboradores da Mecânica Quântica. De fato, Bohr chegou a admitir em 1962 que [3]:

Se não fossem os desafios de Einstein, o desenvolvimento da Física Quântica teria sido muito mais lento.

A dualidade onda-partícula da matéria postulada por Louis de Broglie em 1924, o desenvolvimento da função de onda de Erwing Schrödinger em 1926, prevendo a localização probabilística do elétron ao redor do núcleo e o princípio da incerteza de Heisenberg, em 1927, foram fatos que levaram Einstein a questionar, através de seus “experimentos mentais”, algumas das explicações desses eventos e as suas consequências sobre a realidade física. Um dos mais notórios, realizado em conjunto com Boris Podolsky e Nathan Rosen, que levou ao desenvolvimento do tema central deste trabalho, é datado de 1935 e conhecido atualmente como *Paradoxo EPR*. O presente capítulo tem por objetivo explicitar as particularidades dos fatos que culminaram nesse paradoxo e as interpretações a ele dadas pelos físicos Bohr, Schrödinger, Bohm e Bell.

### 2.1 O Paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen

Uma discussão que originou o desenvolvimento dos conceitos a respeito do *Emaranhamento Quântico* foi exposta em um artigo publicado em 1935 na *Physical Review* por Albert Einstein e mais dois colegas de Princeton, o ucraniano Boris Podolsky e o norte-americano Nathan Rosen, questionando se a Mecânica Quântica seria uma teoria completa. Conhecido como Paradoxo EPR, devido às iniciais dos sobrenomes dos seus autores,



esse trabalho propôs, através de um experimento mental, uma análise sobre se a Mecânica Quântica era uma teoria completa ou se possuía variáveis ocultas [4]. Nesse artigo, os seus autores definiram alguns conceitos iniciais, levando em consideração a ideia de *realidade* e *localidade* em uma teoria física, para comprovarem a incompletude da Mecânica Quântica.

Considerando a ideia de realidade em uma teoria física, EPR determinou as definições abaixo [4]:

- (i) Se, sem perturbar o sistema de nenhuma maneira, pudermos prever com certeza, (i.e, com probabilidade igual à unidade) o valor de uma grandeza física, então existe um *elemento de realidade* física que corresponde a essa grandeza física;
- (ii) O seguinte requisito para uma teoria completa parece ser um requisito necessário: todo elemento de realidade física deve possuir uma contraparte na teoria física. Chamaremos isso de *condição de completude*;

Como vimos acima, segundo a definição utilizada em (i) no paradoxo EPR para *elemento de realidade*, uma condição suficiente de realidade para uma grandeza física é a possibilidade de predizê-la com segurança, isto é, de prever o seu valor sem erro. No caso de um sistema físico, uma grandeza física representa um elemento de realidade definido por EPR, quando podemos prever com certeza o valor dessa grandeza física sem afetar o sistema onde este se estabelece. Dessa forma, conforme (ii), uma teoria seria completa quando todos os elementos de realidade do sistema físico pudessem ser conhecidos, não por previsões filosóficas, mas através do resultado de experimentos e medições.

Para demonstrar as definições dadas em (i) e (ii), em [4], EPR utilizou a descrição da Mecânica Quântica do comportamento de uma partícula para denotar a incompletude dessa teoria, como veremos a seguir.

Seja uma partícula com um único grau de liberdade que é completamente caracterizada por uma função de onda  $\Psi$ , onde para cada grandeza física observável  $A$  existe um operador  $\hat{A}$ . Se  $\Psi$  é uma autofunção de  $\hat{A}$ , então:

$$\Psi' \equiv \hat{A}\Psi = a\Psi, \quad (2.1)$$

onde, sendo  $a$  um número, a grandeza física  $A$  terá certamente esse valor  $a$  sempre que a partícula estiver no estado dado por  $\Psi$ , ou seja, de acordo com a definição de realidade de EPR, nesse caso, existe o elemento de realidade  $a$  que corresponde a grandeza física  $A$ .

Seja agora  $\Psi$  dado por:

$$\Psi = e^{\frac{2\pi i}{h} p_0 x}, \quad (2.2)$$

onde  $h$  é a constante de Plank,  $p_0$  é uma constante qualquer e  $x$  é uma variável independente. Aplicando o operador momento, dado por  $\hat{P} = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$ , em  $\Psi$ , teremos:

$$\begin{aligned} \hat{P}\Psi &= \left( \frac{h}{2\pi i} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ &= \left( \frac{h}{2\pi i} \right) \left( \frac{2\pi i}{h} \right) p_0 e^{\frac{2\pi i}{h} p_0 x} \\ &= p_0 e^{\frac{2\pi i}{h} p_0 x} \\ &= p_0 \Psi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Concluí-se então que para o estado dado por (2.2), o valor do momento encontrado é real, isto é, representa um elemento de realidade, e será dado por  $p_0$ .

Agora, retomando a equação (2.1), se não pudermos aplicá-la a um dado estado, então não teremos um valor particular para a grandeza física  $A$ . Por exemplo, é o que ocorre para a coordenada da partícula. Se  $\hat{Q}$  é um operador que corresponde ao autovalor da variável independente  $x$ , teremos:

$$\hat{Q}\Psi = x\Psi \neq a\Psi. \quad (2.4)$$

De acordo com a Mecânica Quântica, para a coordenada de uma partícula situada no intervalo  $[a, b]$ , podemos dizer que a probabilidade relativa que uma medição dessa coordenada fornecer um resultado que esteja entre  $a$  e  $b$  será:

$$\begin{aligned} P(a, b) &= \int_a^b \bar{\Psi}\Psi dx \\ &= \int_a^b dx \\ &= b - a. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como vemos, essa probabilidade depende somente da diferença  $b - a$ , logo todos os valores da coordenada são igualmente possíveis. Daí concluí-se que a definição de um valor de coordenada para uma partícula em um estado dado por (2.2) não será possível, a não ser que seja obtido através de uma medição direta, o que perturbaria o sistema e alteraria o seu estado. Em outras palavras, após essa medição, a partícula não mais estaria no estado dado por (2.2). Então, como definido pela Mecânica Quântica, se o momento da partícula é conhecido, sua coordenada não representa uma realidade física, já que eles não comutam.

Além do que foi definido em (i) e (ii), para chegarem a conclusão de incompletude da Mecânica Quântica, agora atentando para a ideia de grandezas físicas  $A$  e  $B$  que não comutam ( $AB \neq BA$ ), os físicos do EPR definiram as considerações abaixo [4]:

- (iii) A descrição da mecânica quântica para a realidade dada pela função de onda não é completa ou;
- (iv) quando operadores que correspondem a duas grandezas físicas não comutam, as duas grandezas não podem ter realidade simultânea.

Dessa forma, EPR concluiu que se essas grandezas físicas possuísem realidades simultâneas, isto é, apresentassem valores bem definidos ao mesmo tempo, isso tornaria a representação da sua função de onda completa, conforme (ii). No entanto, isso não ocorre devido a não-comutabilidade dessas grandezas físicas, o que os levou a concluir (iii).

Esse paradoxo, utilizando a ideia intuitiva de localidade, também questiona o fato de que uma medição realizada em um ponto de um sistema quântico afeta instantaneamente o resultado de outra medição feita em um ponto distinto do mesmo sistema, independente da distância que os separa, o que foi apelidado por Einstein de *ação fantasmagórica à distância*. Isto é, se para dois sistemas  $A$  e  $B$  entre os quais houve, previamente, uma interação, pudermos fazer previsões a respeito de um deles, com base nas medições feitas no outro, concluímos que esses sistemas possuem algum tipo de correlação que torna isso possível.

Apoiando-se no princípio da relatividade, a hipótese central argumentada é que de acordo com o princípio da localidade nenhuma informação pode viajar a uma velocidade superior a da luz, e portanto essa ação das variáveis adicionais, posteriormente chamadas de variáveis ocultas, não poderia ser aceitável. Para melhor explicitar as ideias centrais de EPR, vamos generalizar a explicação relativa aos dois sistemas que sofreram uma interação em um primeiro momento e depois foram separados, mas preservando alguma correlação ao nível quântico.

Sejam duas partículas correlacionadas  $P_A$  e  $P_B$ , onde a medição direta em uma delas correspondesse a uma medição sobre a outra. Se no destino  $A$  é feita a medição de uma grandeza física (observável)  $A_1$  de  $P_A$ , o estado de  $P_B$  seria reduzido a um autoestado de  $A_2$ , outra grandeza física de  $P_A$ . Estando ainda em  $A$ , poder-se-ia medir uma grandeza física  $B_1$  de  $P_B$ , que fosse incompatível com  $A_1$  ( $A_1B_1 \neq B_1A_1$ ) e, dessa forma, o estado de  $P_B$  em  $B$  se reduziria a um autoestado de  $B_2$ , que não comuta com  $A_2$  ( $A_2B_2 \neq B_2A_2$ ). Considerando os argumentos de EPR de *realidade* e *localidade*, qualquer medição que se

faça em  $A$  não afetaria instantaneamente a realidade em  $B$ . Dessa forma, medindo tanto  $A_1$  como  $B_1$  em  $A$ , tanto o autoestado de  $A_2$  quanto o de  $B_2$  teriam realidade simultânea em  $B$ , o que contradiz os postulados da Mecânica Quântica, já que essas quantidades físicas não comutam [5].

Baseados nas ideias acima, a conclusão de Einstein, Podolsky e Rosen foi que, devido a sua natureza, a Mecânica Quântica era uma teoria incompleta, já que não obedecia a condição de completude estabelecida por eles, mas era complementada pela existência de variáveis ocultas, visto que não seria possível estabelecer previamente o comportamento bem definido para um sistema com todos os elementos de realidade que o compõem.

## 2.2 O Paradoxo EPR para Bohr

Com a publicação do artigo EPR, Leon Rosenfeld, um físico muito influente na época e amigo de Niels Bohr, afirmou [5]:

Este ataque caiu sobre nós como um raio dos céus.

Em resposta ao EPR, cinco meses depois, Bohr publicou um artigo, com o mesmo título e na mesma revista, contestando os argumentos que definiram a incompletude da Mecânica Quântica. Para Bohr, havia uma ambiguidade na definição dada por EPR para um elemento de realidade quando esta fosse aplicada a um fenômeno quântico. O fato de EPR ter utilizado a declaração *sem de maneira nenhuma provocar um distúrbio no sistema*, levou Bohr a considerar que a escolha em medir uma quantidade  $p$  ou  $x$  já constituiria uma interferência no sistema. O que Bohr rejeitou no EPR foi a declaração feita no artigo de não distúrbio no sistema e não a definição de elemento de realidade [6].

Considerando os dois sistemas correlacionados  $A$  e  $B$  citados no EPR, que interagiram no passado, mas não o fazem mais, quando é realizada uma medição no momento de  $A$  ( $p_A$ ), imediatamente passa-se a conhecer o momento de  $B$  ( $p_B$ ), dessa forma, nada pode ser afirmado a respeito da coordenada do sistema  $B$  ( $x_B$ ), já que esta não comuta com o seu momento ( $x_B p_B \neq p_B x_B$ ). Em [6], Bohr argumentou que os sistemas  $A$  e  $B$  são inseparáveis, o que nos leva a concluir que esses possuem a mesma função de onda  $\Psi$  e a medição direta em qualquer uma delas pode causar o colapso de

$\Psi$ , além de afetá-las simultaneamente. Podemos concluir que, mesmo não explicitamente, Bohr já aceitava a não-localidade desse fenômeno na Mecânica Quântica [5].

Sendo assim, para sistemas correlacionados, seria possível conhecermos simultaneamente as quantidades físicas (observáveis) de mesma natureza, como as posições ou os momentos, ao realizarmos uma medição em apenas uma das partes, mas não seria possível conhecermos suas quantidades físicas que fossem canonicamente conjugadas, isto é, que não podem ser conhecidas ao mesmo tempo. Este último fato preserva a completude da Mecânica Quântica.

Embora essa explicação de Bohr não tenha alcançado a mesma repercussão que o próprio artigo EPR obteve, ela contribuiu para ampliar as discussões sobre as consequências causadas pelas argumentações feitas em EPR.

## 2.3 O Paradoxo EPR para Schrödinger

Através de três artigos, o primeiro escrito em alemão (1935) e os outros dois escritos em inglês, um em 1935 [1] e o outro em 1936 [7], Erwing Schrödinger tentou explicar estas particularidades da Mecânica Quântica discutidas no paradoxo EPR. Em [1], retomando a ideia descrita em [4] de dois sistemas correlacionados, Schrödinger define que a interação mútua entre os sistemas é um traço característico da Mecânica Quântica, pois através da função de onda que representa as interações trocadas entre esses sistemas, ele define que eles se tornaram emaranhados. Foi a partir dessa ideia que Schrödinger definiu o termo *emaranhado*<sup>1</sup> e o utilizou pela primeira vez [8].

Para explicar essa particularidade, também utilizando um experimento mental descrito em seu artigo em alemão de 1935, Schrödinger enunciou:

Um gato é trancado dentro de uma câmara de aço junto com o seguinte dispositivo, que não sofre interferência do gato: num tubo contador Geiger há uma pequena porção de substância radioativa, onde há 50% de chance, no decurso de uma hora, de decaimento de um dos seus átomos, assim como também, com igual probabilidade, talvez nada ocorra. Caso haja o decaimento radioativo, o tubo contador liberta uma descarga e através de um relé solta um martelo que estilhaça um pequeno frasco com ácido cianídrico, o que mataria o gato. A função de onda  $\Psi$  do sistema completo compreenderia a superposição em partes iguais dos

---

<sup>1</sup> Em seu primeiro artigo em alemão *verschränkt* e nos outros dois em inglês *entangled*.

estados do gato vivo e do gato morto simultaneamente:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{vivo} + \Psi_{morto}). \quad (2.6)$$

Com essa analogia, utilizando objetos macroscópicos, Schrödinger quis demonstrar que quando desconhecemos previamente o estado de um sistema, ou seja, quando não podemos identificá-lo, o sistema estará simultaneamente em todos os estados possíveis, isto é, o sistema está em um estado de superposição, como descrito na relação (2.6). Ao tentarmos fazer algum tipo de observação, estaremos interferindo em seu resultado final. A interpretação dessa citação de Schrödinger sugere que o gato e o dispositivo montado na caixa estão emaranhados, pois eles estão interligados por correlações quânticas. Essa peculiaridade do mundo quântico descrita nesse experimento mental ficou conhecida como *gato de Schrödinger*.

Schrödinger ainda explica o processo de *desemaranhamento*, que ocorre quando são feitas medições experimentais diretas sobre um dos sistemas emaranhados. Nesse caso, para sistemas compostos,  $A$  e  $B$ , onde existem correlações mútuas, ao se realizar medidas experimentais em um dos sistemas, estaremos modificando o estado do sistema por completo, o que romperia as correlações quânticas entre os sistemas, tornando-os desentrelaçados ou desemaranhados.

## 2.4 O Paradoxo EPR para Bohm

Baseado em seu livro sobre teoria quântica, escrito em 1951, por meio de dois artigos, o primeiro escrito em 1952 [9] e o outro em 1957 [10], esse último em parceria com Y. Aharonov, David Bohm, para provar experimentalmente a teoria quântica, tentou explicar o paradoxo EPR através de um sistema de uma molécula de spin total zero que consistia de dois átomos, cada um com spin meio, utilizando um estado puro maximamente emaranhado, o singlete:

$$|\Upsilon\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|01\rangle - |10\rangle]. \quad (2.7)$$

Em seu teste experimental, Bohm propôs a realização das medições no singlete da equação (2.7) na mesma direção, mas em sentidos arbitrários. Para desenvolver sua teoria, Bohm utilizou a relação do operador  $\hat{\sigma}^i = \frac{2\hat{s}^i}{\hbar}$ , com  $i = A, B$ ,  $\hat{s}^i$  sendo o operador de spin e  $\hat{\sigma}^i$  o operador da matriz da Pauli, e considerou  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  duas possíveis direções

onde podemos efetuar medições. Pelo fato do spin total do sistema ser nulo, ao realizarmos uma medida em uma componente de spin de uma partícula  $A$ , podemos concluir, imediatamente, que uma medida feita na mesma componente de spin de uma partícula  $B$  terá valor oposto ao de  $A$ . Isso significa que, utilizando a mesma componente de spin, para uma medida  $d$  obtida de  $A$ , teremos como resultado  $-d$  em  $B$ . A demonstração matemática dessa afirmação será vista a seguir.

Seja a relação do operador do primeiro spin na direção  $\mathbf{x}$  e a do segundo spin na direção  $\mathbf{y}$  dada por  $\hat{\sigma}^{A_x B_y} = (\hat{\sigma}^A \cdot \mathbf{x}) \otimes (\hat{\sigma}^B \cdot \mathbf{y})$ . Calculando o valor esperado ou a média desse valor em  $|\Upsilon\rangle$ , teremos:

$$\begin{aligned}
\langle \Upsilon | \hat{\sigma}^{A_x B_y} | \Upsilon \rangle &= \langle \Upsilon | (\hat{\sigma}^A \cdot \mathbf{x}) \otimes (\hat{\sigma}^B \cdot \mathbf{y}) | \Upsilon \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left[ (\langle 01 | - \langle 10 |) \left[ \left( \frac{2\hat{s}^A}{\hbar} \cdot \mathbf{x} \right) \otimes \left( \frac{2\hat{s}^B}{\hbar} \cdot \mathbf{y} \right) \right] (|01\rangle - |10\rangle) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{4}{\hbar^2} \left[ \langle 01 | [(\hat{s}^A \cdot \mathbf{x}) \otimes (\hat{s}^B \cdot \mathbf{y})] | 01 \rangle + \langle 10 | [(\hat{s}^A \cdot \mathbf{x}) \otimes (\hat{s}^B \cdot \mathbf{y})] | 10 \rangle \right] \\
&= \frac{2}{\hbar^2} \frac{\hbar^2}{4} (-\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) [\langle 01 | 01 \rangle + \langle 10 | 10 \rangle] \\
&= -\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{2} \cdot (2) \\
&= -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Para o caso dessas direções serem iguais ( $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ), esse resultado, por simplicidade, será sempre  $-1$ , caso contrário não será possível defini-los simultaneamente. Dessa forma, como dissemos, quando Bohm mediu um dos observáveis em uma direção qualquer, como  $\frac{\hbar}{2}$ , ele obteve como resultado imediato o do outro observável nessa mesma direção como  $-\frac{\hbar}{2}$ , que seria uma anti-correlação perfeita. Já que na mesma direção eles comutam, ele teria os elementos de realidade dos dois observáveis. No entanto, ao realizar essas medições para direções diferentes ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ), ele constatou que não seria possível determiná-las simultaneamente, pois elas não comutam.

Sendo assim, não seria possível definir os elementos de realidade dos dois observáveis simultaneamente, pois existem variáveis ocultas na Mecânica Quântica com valores bem definidos, de modo que essa teoria só pode nos fornecer informações incompletas. Logo, concordando com o paradoxo EPR, Bohm afirma que [10]:

Esta experiência pode ser considerada como a primeira prova empírica clara de que os aspectos da teoria quântica discutidos por EPR representam propriedades reais da Mecânica Quântica.

## 2.5 O Paradoxo EPR para Bell

Partindo dessa ideia de Bohm, utilizando o singlete, em 1964, John S. Bell desenvolveu um teste experimental para verificar a teoria das variáveis ocultas na Mecânica Quântica [11]. Para o seu teste, Bell sugeriu uma generalização do experimento de Bohm fazendo as medições no singlete da equação (2.7) em direções arbitrárias. Concordando com o paradoxo EPR, ele defendia que além da função de onda e das variáveis dinâmicas, a representação de um sistema na Mecânica Quântica deve abranger as variáveis ocultas ou adicionais, que ele chamou de  $\lambda$ . Quer dizer, segundo essa representação, para um observável  $\mathcal{B}$ , o seu valor exato corresponde a uma distribuição de variáveis ocultas  $\rho(\lambda)$ . Dessa forma, o valor esperado de  $\mathcal{B}$  seria dado pela média:

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \int \mathcal{B}(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (2.9)$$

Quando se calcula o valor médio de um estado, como feito na equação (2.9), teremos uma média sobre  $\rho(\lambda)$  e se  $\lambda$  for conhecido, teremos um valor bem definido desse estado. Então  $\lambda$  seria uma coleção de variáveis ocultas do estado com ação local e que dão o elemento de realidade aos valores, obedecendo ao critério do paradoxo EPR.

Para definir a localidade utilizada por Bell, consideremos um sistema composto por duas partes  $A$  e  $B$  que compartilham um estado emaranhado  $|\phi_{AB}\rangle$ , ou seja, as partes  $A$  e  $B$  possuem correlações quânticas, onde são feitas as medidas respectivamente com os observáveis  $A$  e  $B$ . Podemos escrever a probabilidade de se obter  $a$  em  $A$  e  $b$  em  $B$  como;

$$\begin{aligned} p_{a,b|A,B} &= |\langle ab|\phi_{AB}\rangle|^2 \\ &= \langle \phi_{AB} | (|a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b|) | \phi_{AB} \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Quando efetuamos uma medida local em  $A$ , teremos:

$$\begin{aligned} p_{a|A,B} &= \sum_b \langle \phi_{AB} | (|a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b|) | \phi_{AB} \rangle \\ &= \langle \phi_{AB} | \left( |a\rangle\langle a| \otimes \sum_b |b\rangle\langle b| \right) | \phi_{AB} \rangle \\ &= \langle \phi_{AB} | (|a\rangle\langle a| \otimes \hat{1}^B) | \phi_{AB} \rangle, \end{aligned} \quad (2.11)$$

logo, as medições realizadas em  $A$  são independentes das realizadas em  $B$ .

Retomando a ideia de Bell, utilizando  $\hat{\sigma}^A \cdot \mathbf{x}$  e  $\hat{\sigma}^B \cdot \mathbf{y}$ , o correspondente para a



distribuição de variáveis ocultas  $\lambda$  será:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}^A \cdot \mathbf{x} \rightarrow A_{\mathbf{x}}(\lambda), & \text{com valores de } A_{\mathbf{x}}(\lambda) = \pm 1 \\ \hat{\sigma}^B \cdot \mathbf{y} \rightarrow B_{\mathbf{y}}(\lambda), & \text{com valores de } B_{\mathbf{y}}(\lambda) = \pm 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

De acordo com a definição de localidade anteriormente desenvolvida, teremos que os resultados de  $A_{\mathbf{x}}(\lambda)$  não dependerão de  $\mathbf{y}$ , assim como os de  $B_{\mathbf{y}}(\lambda)$  não dependerão de  $\mathbf{x}$ , ou seja, os resultados em cada subsistema dependerão apenas do sistema composto e da localidade do subsistema.

Para a medida conjunta nesse sistema composto, em seu artigo de 1964, Bell fez a migração da simbologia utilizada por Bohm, vista na Seção 2.4, para a simbologia abaixo:

$$(\hat{\sigma}^A \cdot \mathbf{x} \otimes \hat{\sigma}^B \cdot \mathbf{y}) \rightarrow A_{\mathbf{x}}(\lambda)B_{\mathbf{y}}(\lambda). \quad (2.13)$$

Essa simbologia possui o mesmo significado da utilizada por Bohm, onde teremos o primeiro spin na direção  $\mathbf{x}$  e a do segundo spin na direção  $\mathbf{y}$ .

Já que temos agora o valor completo para a Mecânica Quântica, pois estamos utilizando a variável oculta  $\lambda$ , ao calcularmos os valores médios para o estado  $|\Upsilon\rangle$ , teremos como resultado valores que obedecem aos critérios da Mecânica Quântica segundo EPR

$$\begin{aligned} \langle A_{\mathbf{x}}B_{\mathbf{y}} \rangle &= \langle \Upsilon | [(\hat{\sigma}^A \cdot \mathbf{x}) \otimes (\hat{\sigma}^B \cdot \mathbf{y})] | \Upsilon \rangle \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A_{\mathbf{x}}(\lambda)B_{\mathbf{y}}(\lambda) \\ &= -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

pois na relação acima temos o realismo dos valores, com o uso de  $\lambda$ , e a localidade, já que um subsistema não influencia o outro. Daí, se teria comprovada que a Mecânica Quântica é incompleta.

No entanto, diferentemente do que os autores anteriores defendiam, Bell demonstrou que a (2.14) normalmente não é possível dentro da Mecânica Quântica. As hipóteses feitas para encontrar (2.14), localidade e realidade, dificilmente darão esse resultado. Para comprovar isso, ele definiu  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  com  $A_{\mathbf{y}} = -B_{\mathbf{y}}$ . Logo, teremos a relação:

$$\begin{aligned} \langle A_{\mathbf{x}}B_{\mathbf{y}} \rangle &= - \int d\lambda \rho(\lambda) A_{\mathbf{x}}(\lambda)A_{\mathbf{y}}(\lambda) \\ &= -\langle A_{\mathbf{x}}A_{\mathbf{y}} \rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Bell incluiu uma terceira direção,  $\mathbf{z}$ , para verificar o comportamento dessa relação e particularizou essas condições considerando  $A_{\mathbf{z}} = -B_{\mathbf{z}}$ . Subtraiu a média dos

valores de (2.15) da média de  $A_{\mathbf{x}}$  e  $B_{\mathbf{z}}$ :

$$\begin{aligned}\langle A_{\mathbf{x}}B_{\mathbf{y}} \rangle - \langle A_{\mathbf{x}}B_{\mathbf{z}} \rangle &= - \int d\lambda \rho(\lambda) A_{\mathbf{x}}(\lambda)A_{\mathbf{y}}(\lambda) + \int d\lambda \rho(\lambda) A_{\mathbf{x}}(\lambda)A_{\mathbf{z}}(\lambda) \\ &= - \int d\lambda \rho(\lambda) [A_{\mathbf{x}}(\lambda)A_{\mathbf{y}}(\lambda) - A_{\mathbf{x}}(\lambda)A_{\mathbf{z}}(\lambda)] \\ &= - \int d\lambda \rho(\lambda) A_{\mathbf{x}}(\lambda)A_{\mathbf{y}}(\lambda) [1 - A_{\mathbf{y}}(\lambda)A_{\mathbf{z}}(\lambda)].\end{aligned}\quad (2.16)$$

Onde,  $A_j(\lambda)A_j(\lambda) = |A_j(\lambda)|^2 = 1$  para  $j$  sendo qualquer direção ( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ , ou  $\mathbf{z}$ ), pois  $A_j(\lambda) = \pm 1$ .

Tomando (2.16) em módulo, já que em (2.12) os valores variam entre  $\pm 1$  e considerando a propriedade matemática que o módulo da integral é menor ou igual a integral do módulo, teremos a desigualdade:

$$|\langle A_{\mathbf{x}}B_{\mathbf{y}} \rangle - \langle A_{\mathbf{x}}B_{\mathbf{z}} \rangle| \leq \int \rho(\lambda) d\lambda A_{\mathbf{x}}(\lambda)A_{\mathbf{y}}(\lambda) [1 - A_{\mathbf{y}}(\lambda)A_{\mathbf{z}}(\lambda)].\quad (2.17)$$

Como estamos trabalhando com módulo e o termo  $|A_{\mathbf{x}}(\lambda)A_{\mathbf{y}}(\lambda)| = 1$ , podemos substituí-lo na integral por 1 e  $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$ , pois representa a soma sobre todos os  $\lambda$ . Então, a integral acima terá como resultado  $1 - \langle A_{\mathbf{y}}A_{\mathbf{z}} \rangle$ , onde substituímos  $A_{\mathbf{z}} = -B_{\mathbf{z}}$ :

$$|\langle A_{\mathbf{x}}B_{\mathbf{y}} \rangle - \langle A_{\mathbf{x}}B_{\mathbf{z}} \rangle| \leq 1 + \langle A_{\mathbf{y}}B_{\mathbf{z}} \rangle.\quad (2.18)$$

Na relação acima, que é a primeira das desigualdades de Bell para três direções, teremos como resultado: zero para  $\langle A_{\mathbf{y}}B_{\mathbf{z}} \rangle = -1$  e 2 para  $\langle A_{\mathbf{y}}B_{\mathbf{z}} \rangle = 1$ .

A inequação (2.18) comprovou para Bell a relação (2.14), onde:

$$\langle A_{\mathbf{x}}B_{\mathbf{y}} \rangle = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y};\quad (2.19)$$

$$\langle A_{\mathbf{x}}B_{\mathbf{z}} \rangle = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{z};\quad (2.20)$$

$$\langle A_{\mathbf{y}}B_{\mathbf{z}} \rangle = -\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}.\quad (2.21)$$

Dessa forma, as desigualdades de Bell nos demonstram que estados com correlações quânticas, os estados emaranhados, não podem ser analisados utilizando o realismo local<sup>2</sup>, isto é, que esses estados que violam essas desigualdade se caracterizam pela não-localidade.

<sup>2</sup> Dado um sistema físico, o realismo local pode ser interpretado da seguinte forma: enquanto o realismo determina que os valores decorrentes de medições nesse sistema são completamente originados por características inerentes a ele, a localidade nos diz que não haverá influência instantânea nesse sistema devido a medidas realizadas um outro sistema afastado espacialmente do primeiro sistema (entre sistemas independentes).

Como vimos, a incompatibilidade entre a Mecânica Quântica e o realismo local é demonstrada matematicamente pelas desigualdades de Bell. Quando essas são violadas, determinam que o sistema está emaranhado. Essas desigualdades são muito eficientes para testar o emaranhamento em sistemas compostos puros, pois esses sistemas se caracterizam por não possuírem qualquer tipo de correlação (clássicas ou quânticas). Já para sistemas compostos mistos elas não são tão eficientes, pois para esses sistemas, que se caracterizam por possuírem correlações clássicas (como veremos no próximo capítulo), as desigualdades de Bell não são capazes de diferenciar essas correlações das quânticas. De um modo geral, podemos perceber as desigualdades de Bell como testemunhas de emaranhamento, já que através dessas podemos detectar o emaranhamento de um estado [12].

Os estados de Bell, que representam um conjunto de quatro estados bipartite genuinamente emaranhados, são os apresentados abaixo:

$$|\Gamma_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), \quad (2.22)$$

$$|\Gamma_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle), \quad (2.23)$$

$$|\Upsilon_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), \quad (2.24)$$

$$|\Upsilon_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle). \quad (2.25)$$

Esses estados, que são ortogonais entre si e normalizados, são amplamente utilizados para o estudo do emaranhamento. Vamos desenvolver uma demonstração que comprova o emaranhamento genuíno dos estados de Bell. Como esse raciocínio desenvolvido é análogo para os quatro estados, vamos aplicá-la somente ao estado  $|\Gamma_-\rangle$ , visto na equação (2.23).

Suponhamos que  $|\Gamma_-\rangle$  possa ser escrito como o produto tensorial de dois estados separáveis, como descrito abaixo

$$(c_1|0\rangle - c_2|1\rangle) \otimes (c_3|0\rangle - c_4|1\rangle),$$

sendo  $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \in \mathbb{C}$ .

De acordo com a suposição anterior, podemos afirmar que:

$$|\Gamma_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle) = c_1c_3|00\rangle - c_1c_4|01\rangle - c_2c_3|10\rangle + c_2c_4|11\rangle.$$

Como os vetores da base  $\{|00\rangle |01\rangle |10\rangle |11\rangle\}$  são ortogonais, teremos que

$$\begin{aligned} c_1 c_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ c_1 c_4 &= 0, \\ c_2 c_3 &= 0, \\ c_2 c_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

o que é contraditório, visto que essas igualdades não podem ser satisfeitas simultaneamente. Daí, concluímos que o estado  $|\Gamma_-\rangle$  não poderá ser representado por um produto tensorial, ou seja, ele representa um estado não separável, que é uma característica dos estados emaranhados.

Uma característica importante dos estados de Bell é que fazendo uma operação em apenas um dos spins, podemos transformar qualquer um desses estados de Bell em qualquer um dos outros três estados. Vejamos um exemplo: seja a matriz de Pauli  $\sigma_3$ , utilizando o operador do tipo  $\sigma_3^{(A)} \otimes \hat{1}^{(B)}$ . Aplicando esse operador no estado  $|\Gamma_+\rangle$ , teremos:

$$\begin{aligned} (\sigma_3^{(A)} \otimes \hat{1}^{(B)}) |\Gamma_+\rangle &= (\sigma_3^{(A)} \otimes \hat{1}^{(B)}) \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle) \\ &= |\Gamma_-\rangle \end{aligned}$$

Uma generalização das desigualdades de Bell foi desenvolvida por John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony e Richard A. Holt em 1969, onde eles utilizaram o emaranhamento da polarização dos fótons, a chamada desigualdade de CHSH, que recebeu esse nome devido as iniciais dos sobrenomes desses físicos. Essa generalização removeu a limitação das desigualdades de Bell a consideração de resultados obtidos dos subsistemas com (anti-)correlações perfeitas, como em (2.14), tornando a nova desigualdade menos restritiva, pois em estados emaranhados não há generalização desse tipo de correlação [13]. Em 1971, em um trabalho publicado nos anais da *International School of Physics Enrico Fermi*, na Itália, Bell rededuziu a desigualdade CHSH desconsiderando as correlações completas e utilizando as mesmas ideias matemáticas, mas para quatro direções distintas  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}')$ , onde ele encontrou a relação abaixo: [14].

$$|\langle A_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{y}} \rangle + \langle A_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{y}'} \rangle + \langle A_{\mathbf{x}'} B_{\mathbf{y}} \rangle - \langle A_{\mathbf{x}'} B_{\mathbf{y}'} \rangle| \leq 2. \quad (2.26)$$

A inequação (2.26) é uma das variações das desigualdade de Bell mais utilizada atualmente quando se estudam estados bipartites puros emaranhados.

## 3 Emaranhamento em Sistemas Bipartite

### 3.1 Sistemas Compostos e Emaranhamento Quântico

Podemos definir *sistemas compostos* como sistemas que compreendem duas ou mais partes, como, por exemplo, os estados de Bell vistos no capítulo anterior, que representam estados genuinamente emaranhados das interações entre dois spins meio. A representação do espaço de fases de sistemas quânticos compostos é dada pelo produto tensorial entre as partes que o compõem [12]. Para melhor entender esse conceito, seja o exemplo abaixo.

Sejam duas partículas cujos espaços de fases são dados por  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ . Para construirmos o espaço de fases ou espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , composto pela relação entre essas partículas, devemos efetuar o produto tensorial entre os espaços de fase das mesmas, logo:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2. \quad (3.1)$$

Matematicamente, a noção de emaranhamento quântico pode ser retirada a partir da estrutura tensorial descrita acima, logo, todos os estados que são separáveis ou fatoráveis são ditos *não emaranhados*.

De um modo geral, os estados mais comuns dentro da Mecânica Quântica são os *estados emaranhados*. A Figura 3.1 é uma noção simplificada do conjunto representativo do espaço de Hilbert, onde vemos que o subconjunto dos estados emaranhados é bem maior se comparado ao de estados separáveis.

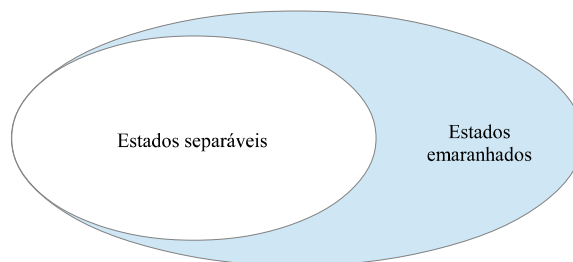


Figura 3.1: Representação do espaço de fases ou espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

O emaranhamento, uma propriedade intrínseca dos estados compostos, também se caracteriza pela superposição de estados. Mas, diferentemente dos estados separáveis, os estados emaranhados não podem ser representados pelo simples produto tensorial dos seus subestados. Isso ocorre porque em sistemas emaranhados, seus subsistemas perdem as suas propriedades individuais e passam a ser vistos como propriedades conjuntas. Outra diferença entre os estados separáveis e os estados emaranhados é a não-localidade, isto é, as correlações que os envolvem. Medições locais feitas em sistemas separáveis demonstraram que seus subsistemas são totalmente descorrelacionados ao nível quântico, ou seja, são independentes entre si. Já em sistemas emaranhados, há correlações quânticas entre seus subsistemas [16], que se caracterizam como interações não-locais. Dessa forma, podemos listar as propriedades abaixo:

**Propriedade 3.1.1 (Sistemas Emaranhados).**

- (i) *É uma particularidade intrínseca aos sistemas compostos;*
- (ii) *Se caracteriza pela não-localidade;*
- (iii) *Se qualifica pela não-separabilidade de seus subsistemas.*

Como vimos, as três propriedades listadas acima são próprias de sistemas que possuem correlações quânticas, ou seja, sistemas quânticos emaranhados. Na propriedade (i), vemos a natureza se define . A propriedade (ii), como vimos no Capítulo 2, é uma das característica dos sistemas emaranhados que mais assustava Einstein, pois ela implica diretamente que em sistemas correlacionados desse tipo, mesmo estes estando espacialmente separados, existem interações ao nível quântico. Já a propriedade (iii) se dá devido a perda de individualidade das partes de um sistema emaranhado. Mas também ela pode ser interpretada como uma consequência da (ii), já que devido às correlações quânticas que interligam os subsistemas de um sistema emaranhado, esse não pode ser decomponível a partir de um produto tensorial.

Como apresentado no Capítulo 1, neste trabalho serão exploradas as características de sistemas quânticos com *emaranhamento bipartite*. A ênfase dada neste trabalho a esse tipo de sistema se justifica porque os estudos relativos a sistemas bipartites emaranhados estão bem mais avançados se comparados com outros tipos de sistemas. O que ocorre devido a natureza binária desses sistemas, pois como compreendem apenas duas partes, ao aplicarmos um teste para verificação de emaranhamento entre seus subsistemas, teremos como resultado apenas duas possibilidades: sim ou não. Na seção seguinte

são apresentadas características mais detalhadas desses tipos de sistemas.

## 3.2 Emaranhamento Bipartite

O *emaranhamento bipartite* se define quando sistemas compostos bipartite apresentam correlações ao nível quântico entre seus dois subsistemas. Para melhor entender essa definição, vamos exemplificá-la a seguir.

Sejam duas partículas representadas pelos sistemas quânticos  $|\psi^A\rangle$  e  $|\psi^B\rangle$ , que pertencem, respectivamente, aos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ . Como vimos no início da seção, o espaço de fases do sistema composto por ambas as partículas,  $\mathcal{H}$ , será descrito pelos vetores pertencentes ao espaço do produto tensorial de  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Dessa forma, qualquer vetor  $|\Psi\rangle$ , pertencente a  $\mathcal{H}$ , poderá ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle \\ &= |\psi^A\rangle |\psi^B\rangle \\ &= |\psi^A \psi^B\rangle. \end{aligned} \tag{3.2}$$

O estado puro descrito na relação (3.2) é dito um estado puro *fatorável*, já os estados puros que não podem ser descritos dessa forma são chamados de *estados puros emaranhados*.

Uma forma mais completa de representar um sistema quântico puro é através do seu operador densidade, ou seja, do seu projetor (o que está melhor explicitado no Apêndice A). Para o sistema quântico  $|\Psi\rangle$ , apresentado na relação (3.2), o seu operador densidade  $\hat{\rho}$  será dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\Psi\rangle\langle\Psi| \\ &= (|\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle) (\langle^A\psi| \otimes \langle^B\psi|) \\ &= |\psi^A\rangle\langle\psi^A| \otimes |\psi^B\rangle\langle\psi^B| \\ &= \hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como vimos, o operador densidade  $\hat{\rho}$ , representado pelo projetor de  $|\Psi\rangle$ , é dado pelo produto tensorial dos operadores densidade de cada subsistema,  $\hat{\rho}^A$  e  $\hat{\rho}^B$ . Esse estado descrito na relação (3.3) é a representação de um estado puro por meio do operador densidade e ele representa um estado *fatorável*. Os estados puros que não podem ser descritos assim são ditos *estados emaranhados*.

Ainda existe a possibilidade de representação de estados bipartite através da mistura estatística do operador densidade  $\hat{\rho}$ . Sejam agora os estados  $|\psi^A\rangle = \sum_i a_i |\psi_i^A\rangle$  e  $|\psi^B\rangle = \sum_j b_j |\psi_j^B\rangle$ . O operador densidade  $\hat{\rho}$ , que representa o produto tensorial entre  $|\psi^A\rangle$  e  $|\psi^B\rangle$ , será  $|\Psi\rangle = |\psi^A\psi^B\rangle = \sum_{i,j} a_i b_j |\psi_i^A\psi_j^B\rangle$ . O seu operador densidade poderá ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= |\psi^A\psi^B\rangle\langle\psi^A\psi^B| \\
&= \left( \sum_{i,j} a_i b_j |\psi_i^A\psi_j^B\rangle \right) \left( \sum_{i,j} a_i^* b_j^* \langle\psi_i^A\psi_j^B| \right) \\
&= \sum_{i,j} a_i a_i^* b_j b_j^* |\psi_i^A\psi_j^B\rangle\langle\psi_i^A\psi_j^B| \\
&= \sum_{i,j} |a_i|^2 |b_j|^2 |\psi_i^A\rangle\langle\psi_i^A| \otimes |\psi_j^B\rangle\langle\psi_j^B| \\
&= \sum_i (|a_i|^2 |b_j|^2 \delta_{i,j}) \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B \\
&= \sum_i p_i \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B, \tag{3.4}
\end{aligned}$$

onde  $p_i = |a_i|^2 |b_j|^2 \delta_{i,j}$ . O estado descrito acima é chamado de estado misto *separável* e todos os outros estados mistos que não podem ser representados dessa forma são ditos *estados mistos emaranhados*.

Embora seja muito sutil, como descrito em [12], existe uma diferença entre estados fatoráveis e estados separáveis. No primeiro caso, como nas relações (3.2) e (3.3), o estado de um subsistema é totalmente independente do outro, eles são separáveis ( $p_i = 1$ ) e os valores médio dos observáveis desses subsistemas são fatoráveis como produtos de valores médios:

$$\begin{aligned}
\langle\hat{A} \otimes \hat{B}\rangle &= \mathbf{Tr} [(\hat{A} \otimes \hat{B}) (\hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B)] \\
&= \mathbf{Tr}_A [\hat{A} \hat{\rho}^A] \mathbf{Tr}_B [\hat{B} \hat{\rho}^B] \\
&= \langle\hat{A}\rangle^{(A)} \langle\hat{B}\rangle^{(B)}. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Já para estados separáveis, como na relação (3.4), os operadores densidade e seus valores médios não são fatoráveis, pois existem correlações em seus subsistemas ao nível de probabilidades, ou seja, esses subsistemas estão ligados através de correlações clássicas, logo:

$$\begin{aligned}
\langle\hat{A} \otimes \hat{B}\rangle &= \mathbf{Tr} \left[ (\hat{A} \otimes \hat{B}) \sum_i p_i (\hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B) \right] \\
&= \sum_i p_i \mathbf{Tr}_A [\hat{A} \hat{\rho}_i^A] \mathbf{Tr}_B [\hat{B} \hat{\rho}_i^B] \\
&= \sum_i p_i \langle\hat{A}\rangle_i^{(A)} \langle\hat{B}\rangle_i^{(B)}. \tag{3.6}
\end{aligned}$$



Note a sutileza na diferença entre as correlações existentes no estado misto apresentado na relação (3.4) e as apresentadas pelos estados emaranhados. Para o primeiro essas correlações são definidas classicamente, ao nível de probabilidades. Já em estados emaranhados essas correlações são quânticas, por isso não permitem a separabilidade de suas partes.

### 3.3 Qualificadores de Emaranhamento

Existem algumas ferramentas que foram desenvolvidos para identificar se um dado estado é emaranhado ou não. Estas ferramentas são os chamados *qualificadores de emaranhamento* ou *critérios de emaranhamento* [16].

Normalmente, um qualificador de emaranhamento não é universal, ou seja, não consegue identificar emaranhamento em todos os tipos de estados quânticos. Isso resulta nas definições de critérios necessários e critérios necessários e suficientes de emaranhamento. Um qualificador é considerado necessário quando a sua identificação de emaranhamento está ligada à algum tipo de restrição; já os critérios necessários e suficientes são os que identificam estados emaranhados com alta confiabilidade e sem restrição, mas para grupos específicos de estados. Por exemplo, como veremos a seguir, existem critérios que não identificam com precisão emaranhamento em sistemas mistos ou em sistemas de altas dimensões; são os critérios necessários. No entanto, há critérios que são altamente confiáveis quando se trata de sistemas puros, e esses são ditos necessários e suficientes.

Aqui serão apresentados alguns dos critérios identificadores de emaranhamento bipartite mais discutidos na literatura atual. Descreveremos os identificadores mais usuais de sistemas bipartites emaranhados, onde exploraremos as principais propriedades representadas por esses critérios, apresentando suas características e semelhanças.

#### 3.3.1 Operador densidade reduzido

Imagine um sistema bipartite onde iremos considerar que cada partícula,  $A$  e  $B$ , poderá estar em qualquer um dos outros dois estados, ou seja, a partícula  $A$  poderá estar no estado  $|\psi_1^A\rangle$  ou  $|\psi_2^A\rangle$  e a partícula  $B$  em  $|\psi_1^B\rangle$  ou  $|\psi_2^B\rangle$ . Seja o estado puro  $|\Psi\rangle$ , composto

pela superposição dos estados das duas partículas,

$$|\Psi\rangle = c_1|\psi_1^A\rangle \otimes |\psi_2^B\rangle + c_2|\psi_2^A\rangle \otimes |\psi_1^B\rangle. \quad (3.7)$$

Vamos representar  $|\Psi\rangle$  agora em termos do seu operador densidade  $\hat{\rho}$ , que como vimos no início desta seção (e que também pode ser visto no Apêndice A), representa o projetor desse estado. Então:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= (c_1|\psi_1^A\rangle \otimes |\psi_2^B\rangle + c_2|\psi_2^A\rangle \otimes |\psi_1^B\rangle) (c_1^*\langle\psi_1^A| \otimes \langle\psi_2^B| + c_2^*\langle\psi_2^A| \otimes \langle\psi_1^B|) \\ &= |c_1|^2|\psi_1^A\rangle\langle\psi_1^A| \otimes |\psi_2^B\rangle\langle\psi_2^B| + c_1c_2^*|\psi_1^A\rangle\langle\psi_2^A| \otimes |\psi_2^B\rangle\langle\psi_1^B| + \\ &\quad + c_1^*c_2|\psi_2^A\rangle\langle\psi_1^A| \otimes |\psi_1^B\rangle\langle\psi_2^B| + |c_2|^2|\psi_2^A\rangle\langle\psi_2^A| \otimes |\psi_1^B\rangle\langle\psi_1^B| \end{aligned} \quad (3.8)$$

O traço de um operador densidade, como pode ser visto no Apêndice A, nada mais é do que a soma de todos os autovalores da diagonal principal da matriz de  $\hat{\rho}$ , ou seja, a soma de todos os graus de liberdade de  $\hat{\rho}$ . Em um sistema bipartite, o operador densidade reduzido para um dos subsistemas é dado pelo traço parcial relativo ao outro subsistema sobre o operador densidade  $\hat{\rho}$ , isto é, o operador densidade reduzido para um dos subsistemas é obtido a partir da soma de todos os graus de liberdade do outro subsistema. De posse dessa informação, vamos calcular o operador densidade reduzido para o sistema  $A$ , que denotamos por  $\hat{\rho}^A$ . Logo:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^A &= \mathbf{Tr}_B [\hat{\rho}] \\ &= \langle\psi_1^B|\hat{\rho}|\psi_1^B\rangle + \langle\psi_2^B|\hat{\rho}|\psi_2^B\rangle \\ &= |c_1|^2|\psi_1^A\rangle\langle\psi_1^A| \otimes \langle\psi_2^B|\psi_2^B\rangle + c_1c_2^*|\psi_1^A\rangle\langle\psi_2^A| \otimes \langle\psi_1^B|\psi_2^B\rangle + \\ &\quad + c_1^*c_2|\psi_2^A\rangle\langle\psi_1^A| \otimes \langle\psi_2^B|\psi_1^B\rangle + |c_2|^2|\psi_2^A\rangle\langle\psi_2^A| \otimes \langle\psi_1^B|\psi_1^B\rangle \\ &= |c_1|^2|\psi_1^A\rangle\langle\psi_1^A| + |c_2|^2|\psi_2^A\rangle\langle\psi_2^A|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Similarmente para  $B$ , teremos

$$\hat{\rho}^B = |c_1|^2|\psi_2^B\rangle\langle\psi_2^B| + |c_2|^2|\psi_1^B\rangle\langle\psi_1^B|. \quad (3.10)$$

Podemos caracterizar o grau de emaranhamento de um sistema puro de acordo com o grau de pureza de seus subsistemas [17]. Quando calculamos o traço dos operadores densidade reduzidos de cada um dos subsistemas em conjunto com a sua propriedade de idempotência, podemos identificar se o sistema possui ou não emaranhamento.

Seja o operador densidade reduzido  $\hat{\rho}^{(i)}$ , com  $i = A$  ou  $B$ . Através do cálculo do traço de  $[\hat{\rho}^{(i)}]^2$ , teremos que:

$$\mathbf{Tr} [\hat{\rho}^{(i)}]^2 \begin{cases} = 1, & |\Psi\rangle \text{ não é um estado emaranhado.} \\ < 1, & |\Psi\rangle \text{ descreve um estado emaranhado.} \end{cases} \quad (3.11)$$

De acordo com a relação (3.11), podemos verificar através da idempotência dos operadores densidade reduzidos do estado  $|\Psi\rangle$  se ele possui ou não emaranhamento. Se  $|\Psi\rangle$  é fatorável os seus operadores densidade reduzidos ( $\hat{\rho}^{(i)}$ ,  $i = A$  ou  $B$ ) serão idempotentes, dessa forma, eles terão apenas um autovalor não nulo e igual a unidade [12]. Daí, podemos concluir que:

$$\hat{\rho}^{(i)} \begin{cases} = (\hat{\rho}^{(i)})^2, & |\Psi\rangle \text{ é um estado puro e não emaranhado.} \\ \neq (\hat{\rho}^{(i)})^2, & |\Psi\rangle \text{ é um estado misto e emaranhado.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Vamos à explicação das relações (3.11) e (3.12). Se  $\hat{\rho}$  representa um estado puro bipartite, de acordo com o que vimos no início desta seção, ele é fatorável e não deve apresentar qualquer tipo de correlação entre seus subsistemas, ou seja, ele não possui correlações clássicas, ao nível de probabilidade, e conforme a relação (A.26), apresentada no Apêndice A, teremos que  $\mathbf{Tr} [(\hat{\rho}^{(i)})^2] = 1$ . Daí, concluímos que existem correlações quânticas entre os subsistemas de  $\hat{\rho}$ , o que caracteriza o seu emaranhamento.

### 3.3.2 Decomposição de Schmidt

Uma ferramenta também muito utilizada para identificar emaranhamento em sistemas puros bipartite é a *decomposição de Schmidt* [18].

**Teorema 3.3.1 (Decomposição de Schmidt).** *Seja o vetor descrito na relação (3.7), vamos escrevê-lo como  $|\Psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{d_A, d_B} c_{ij} |\psi_i^A \psi_j^B\rangle \in (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ . Então existe uma base ortonormal  $|\mu_i\rangle \in \mathcal{H}_A$  e uma base ortonormal  $|\nu_j\rangle \in \mathcal{H}_B$  onde podemos escrever  $|\psi\rangle$  da forma*

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^R \lambda_k |\mu_k \nu_k\rangle, \quad (3.13)$$

onde,  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  é chamado de *coeficiente de Schmidt* e deve satisfazer a relação  $\sum_k |\lambda_k|^2 = 1$ . O número  $R \leq \min\{d_A, d_B\}$  é chamado de *posição de Schmidt* de  $|\psi\rangle$ . A quantidade de  $\lambda_k$  não-nulos necessários para decompor  $|\psi\rangle$ , que chamaremos de  $N_{\lambda_k}$ , é chamada de *número de Schmidt*.

Os valores de  $\lambda_k$  são dados pela raiz quadrada dos autovalores da matriz obtida a partir do produto entre a matriz formada pelos coeficientes de  $|\Psi\rangle$ , que aqui chamaremos de matriz  $D$ , e a sua transposta conjugada ou auto-adjunta,  $D^\dagger$ , ou seja,  $\lambda_k = \sqrt{l_k}$ , onde  $l_k$  são os autovalores da matriz  $DD^\dagger$ .

Sabemos que há uma relação direta dos coeficientes  $c_{ij}$  com a base escolhida  $\{\psi_i^A \psi_j^B\}$ , pois  $c_{ij} = \langle \psi_i^A \psi_j^B | \Psi \rangle$ . De forma análoga, podemos definir ainda a relação abaixo:

$$\begin{aligned}
c_{\mu_i \nu_j} &= \langle \mu_i \nu_j | \Psi \rangle \\
&= \sum_{k=1} \lambda_k \langle \mu_i \nu_j | \mu_k \nu_k \rangle \\
&= \sum_{k=1} \lambda_k \delta_{ik} \delta_{jk} \\
&= \lambda_k \delta_{\mu_i \nu_j}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Conforme demonstrado na relação acima, na decomposição de Schmidt há uma formação de pares de vetores das bases escolhidas de  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , onde cada um desses pares aparece apenas uma vez na expansão, dessa forma teremos apenas somas simples ao invés de somas duplas, o que reduz a dimensão de  $|\Psi\rangle$  [12].

Através da relação (3.13), vemos que quando  $N_{\lambda_k}$  é a unidade,  $|\Psi\rangle$  pode ser escrito como um estado composto puro, como o da relação (3.2), o que significa que ele é fatorável, ou seja, ele não apresenta qualquer tipo de correlação entre seus subsistemas. Sendo  $N_{\lambda_k} \geq 2$ , teremos que  $|\Psi\rangle$  é emaranhado [16], o que sugere a existência de correlações quânticas em  $|\Psi\rangle$ .

Podemos facilmente verificar que, para um estado puro qualquer, existe uma relação entre o operador densidade reduzido e a decomposição de Schmidt. Seja  $|\Psi\rangle$  um estado puro bipartite de subsistemas  $A$  e  $B$ . Sendo sua decomposição de Schmidt dada por:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1} \lambda_k |\mu_k^A \nu_k^B\rangle, \tag{3.15}$$

onde os coeficientes  $\lambda_k$  são reais e satisfazem  $\sum_k |\lambda_k|^2 = 1$ . O operador densidade para  $|\Psi\rangle$  será:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= |\Psi\rangle\langle\Psi| \\
&= \sum_{k=1} \lambda_k^2 |\mu_k^A \nu_k^B\rangle\langle\mu_k^A \nu_k^B|
\end{aligned} \tag{3.16}$$

e o operador densidade reduzido para cada subsistema será

$$\hat{\rho}^A = \mathbf{Tr}_B[\hat{\rho}] = \sum_{k=1} \lambda_k^2 |\mu_k^A\rangle\langle\mu_k^A| \quad (3.17)$$

$$\hat{\rho}^B = \mathbf{Tr}_A[\hat{\rho}] = \sum_{k=1} \lambda_k^2 |\nu_k^B\rangle\langle\nu_k^B|. \quad (3.18)$$

Vemos nas equações (3.17) e (3.18), que os autovalores de  $\hat{\rho}^A$  e  $\hat{\rho}^B$  são ambos iguais a  $\lambda_k^2$ .

Da demonstração acima, concluímos que uma forma de encontrarmos as bases corretas de cada subsistema para a decomposição de Schmidt é utilizando o cálculo do operador densidade reduzido para o sistema que queremos decompor.

### 3.3.3 Critério PPT

Um condição necessária de separabilidade muito eficiente desenvolvida por Asher Peres e aplicável a sistemas bipartites gerais é o chamado critério da transposta parcial positiva *PPT*<sup>1</sup> [19]. Peres mostrou que há uma relação muito estreita entre o cálculo da transposta parcial do operador densidade de sistemas compostos com a presença de emaranhamento nesse sistema. A seguir, será demonstrado como se calcula a transposta parcial do operador de um sistema bipartite.

Seja o operador densidade  $\hat{\rho}$  que representa um sistema composto por dois subsistemas  $A$  e  $B$ , como o descrito na relação (3.8), por exemplo. Vamos escrever esse operador em termos das bases produto  $\{|\mu_i^A \nu_j^B\rangle\}$

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{ij,kl} \hat{\rho}_{ij,kl} |\mu_i^A \nu_j^B\rangle\langle\mu_k^A \nu_l^B| \\ &= \sum_{ij,kl} \hat{\rho}_{ij,kl} |\mu_i^A\rangle\langle\mu_k^A| \otimes |\nu_j^B\rangle\langle\nu_l^B|. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Os elementos de  $\hat{\rho}$  são dados por:

$$\hat{\rho}_{ij,kl} = \langle\mu_i^A \nu_j^B | \hat{\rho} | \mu_k^A \nu_l^B\rangle. \quad (3.20)$$

Escrevendo a transposta parcial de  $\hat{\rho}$  em relação ao sistema  $A$ , que chamaremos de  $\hat{\rho}^{TA}$ , teremos:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{TA} &= \sum_{ij,kl} \hat{\rho}_{ij,kl}^{TA} (|\mu_i^A\rangle\langle\mu_k^A|)^T \otimes |\nu_j^B\rangle\langle\nu_l^B| \\ &= \sum_{ij,kl} \hat{\rho}_{ij,kl}^{TA} |\mu_k^A\rangle\langle\mu_i^A| \otimes |\nu_j^B\rangle\langle\nu_l^B| \\ &= \sum_{ij,kl} \hat{\rho}_{kj,il} |\mu_k^A \nu_j^B\rangle\langle\mu_i^A \nu_l^B|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

<sup>1</sup> Do inglês *positive partial transpose*.

Observando a relação (3.21), teremos que os elementos da matriz  $\hat{\rho}^{TA}$  serão:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{ij,kl}^{TA} &= \langle \mu_k^A \nu_j^B | \hat{\rho} | \mu_i^A \nu_l^B \rangle \\ &= \hat{\rho}_{kj,il}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

De maneira similar, para o sistema  $B$  teremos os elementos:

$$\hat{\rho}_{ij,kl}^{TB} = \hat{\rho}_{il,kj}.\tag{3.23}$$

Analisando as relações (3.22) e (3.23), podemos perceber que a operação de transposição parcial equivale a troca dos índices correspondentes ao subsistema onde se deseja calcular a transposta parcial. Agora que já sabemos como calcular a transposta parcial para um operador, vamos voltar ao critério de Peres.

O critério de Peres para identificar estados emaranhados se baseia na positividade dos autovalores da transposta parcial do operador densidade do estado. Em resumo, este critério parte da seguinte ideia: sendo  $\hat{\rho}$  um estado quântico, então, matematicamente,  $\hat{\rho}$  é um operador hermitiano ( $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ ), positivo (semi-definido) ( $\hat{\rho} \geq 0$ ) e de traço unitário ( $\text{Tr}[\hat{\rho}] = 1$ ). Logo, sendo a operação de transposição parcial uma operação linear no espaço (real) dos operadores hermitianos ( $\hat{\rho}^* = \hat{\rho}^T$ ), então a transposta parcial de  $\hat{\rho}$  também será um operador positivo [20].

Para enunciarmos o critério de Peres, vamos retomar o operador densidade  $\hat{\rho}$  apresentado no início da seção, onde  $\hat{\rho}^{Ti}$  ( $i = A$  ou  $B$ ) é a sua transposta parcial. Se  $\hat{\rho}$  for do tipo apresentado nas relações (3.3) ou (3.4), a sua transposta parcial terá como resultado autovalores positivos ou não-negativos. Logo:

**Teorema 3.3.2 (Critério PPT).** *Se  $\hat{\rho}$  for separável, então sua transposta parcial  $\hat{\rho}^{Ti}$  será positiva e esse estado não possui emaranhamento em suas partes.*

A comprovação desse critério pode ser realizada através das operações de transformação unitária local, vista na Seção A.3 do Apêndice A. Como demonstrado no Apêndice A, os autovalores de  $\hat{\rho}$  e de  $\hat{\rho}^{Ti}$  ( $i = A$  ou  $B$ ) não variam mediante transformações unitárias locais. Logo, se esses autovalores são positivos antes dessa operação, eles irão permanecer positivos após a operação. Então, podemos aplicar o critério da transposta parcial em qualquer representação da matriz densidade  $\hat{\rho}$  [21].

Por exemplo, dado o operador densidade  $\hat{\rho}$ , que por natureza é positivo (semi-definido), podemos aplicar a operação da transposta parcial sobre o subsistema  $A$  deste

operador utilizando o operador de transposição parcial  $\hat{T}^A \otimes \hat{\mathbf{1}}^B \geq 0$ , onde  $\hat{\mathbf{1}}^B$  é o operador identidade. Então teremos:

$$(\hat{T}^A \otimes \hat{\mathbf{1}}^B) \hat{\rho} = \hat{\rho}^{T^A}. \quad (3.24)$$

No exemplo acima, temos que se o resultado da ação do operador de transposição parcial sobre o operador densidade do sistema tiver como resultado um terceiro operador positivo,  $\hat{\rho}^{T^A} \geq 0$ , então  $\hat{\rho} \geq 0$  representa um estado separável. Caso contrário, ele é um estado emaranhado. Na Seção 3.4 veremos a aplicação deste critério em mais detalhes.

Neste critério, a condição suficiente de identificação de emaranhamento em um estado é a separabilidade, ou seja,  $\hat{\rho}^{T^i} \geq 0$  implica em separabilidade [18]. No entanto, em uma publicação feita em 1996 na *Physical Letter*, os Horodecki demonstraram que essa condição só é válida para sistemas de dimensões  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  e  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ , ou seja, o critério PPT só garante um teste confiável de emaranhamento em sistemas de dimensões baixas [23]. Isto é, esse critério só é necessário e suficiente para sistemas de baixas dimensões.

### 3.3.4 Critério de Horodecki

Este critério, que ficou conhecido como *critério de Horodecki*, foi apresentado na mesma publicação da *Physical Letter*, de 1996, onde os Horodecki haviam demonstrado que a transposição parcial utilizada por Peres só é confiável para sistemas de baixas dimensões, mencionado no fim da seção anterior.

Para caracterizar seu critério, os Horodecki utilizaram um elemento que foi chamado de *mapa*. O termo mapa utilizado pelos Horodecki, tem como sentido um operador que age no espaço dos operadores, isto é, um mapa é um operador que atua sobre outro operador. Por exemplo, o operador de transposição  $\hat{T}$  utilizado no critério PPT é um tipo de mapa que ao agir sobre o operador densidade  $\hat{\rho}$ , terá como resultado um outro operador  $\hat{\rho}^{T^i}$ , como demonstrado na equação (3.24). Para entendermos esse critério, iremos definir a seguir *mapas positivos* e *mapas completamente positivos*.

Seja um operador densidade dado por  $\hat{\rho}$ , onde  $\hat{\rho} \geq 0$ .

**Definição 3.3.1 (Mapa Positivo).** *Um mapa  $\Lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  é chamado de positivo quando leva operadores positivos em operadores positivos. Então se  $\hat{\rho} \geq 0 \Rightarrow \Lambda(\hat{\rho}) \geq 0$ .*

Essa definição se resume ao seguinte: sempre que a ação de um operador

(mapa), pertencente ao conjunto dos complexos, sob um operador positivo resultar em um outro operador positivo, então teremos um mapa positivo.

Retomando o operador de transposição  $\hat{T}$ , sabemos que todo operador pode ser reescrito como uma extensão em produto tensorial,  $\hat{T} \otimes \hat{\mathbf{1}}$ , como visto na equação (3.24). Logo, teremos que:

**Definição 3.3.2 (Mapa Completamente Positivo).** *Um mapa  $\Lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  é chamado de completamente positivo quando ele é positivo e sua extensão a qualquer produto tensorial também o é. Ou seja, sendo  $\hat{\rho} \geq 0$ , se  $\Lambda(\hat{\rho}) \geq 0$  e  $(\Lambda \otimes \hat{\mathbf{1}})(\hat{\rho}) \geq 0$ , então  $\Lambda$  é um mapa completamente positivo.*

O fato da operação de transposição de matrizes ser um mapa positivo, mas não completamente positivo, leva diretamente ao critério PPT, daí vem o critério de Horodecki:

**Teorema 3.3.3 (Critério de Horodecki).** *Dado um operador densidade  $\hat{\rho}$ , que representa um estado quântico.  $\hat{\rho}$  é considerado separável se, e somente se, para qualquer mapa positivo  $\Lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , sua extensão em produto tensorial  $(\Lambda \otimes \hat{\mathbf{1}})$  também for positiva.*

Baseados nesses conceitos de mapas positivos e completamente positivos, os Horodecki mostraram a importância dessas definições no estudo do emaranhamento. Vemos que muitos qualificadores de emaranhamento se baseiam na transposição, que é um mapa positivo, mas nem sempre representa um mapa completamente positivo, como pode ser visto pela equação (3.24). Como dito no fim da Seção 3.3.3, na publicação de 1996 da *Physical Letter*, os Horodecki demonstraram que, para as dimensões  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  e  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ , podemos obter todos os mapas positivos através de combinações de mapas completamente positivos com a operação de transposição parcial [23]. Daí:

**Teorema 3.3.4 (Teorema Horodecki).** *Se  $\hat{\rho}$  é um sistema de dimensões  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  ou  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ , então a positividade da sua transposta parcial ( $\hat{\rho}^{T^i} \geq 0$ ) significa que  $\hat{\rho}$  é separável. Já para sistemas com outras dimensões, isso não será válido.*

Então, o critério de Peres só se mostra suficiente e necessário para sistemas com baixas dimensões, ou seja, nesses casos esse critério consegue caracterizar completamente um sistema como estando ou não emaranhado. Para os outros casos, ele será apenas necessário, pois há exemplos de estados de muitas dimensões onde a transposta parcial é positiva mesmo quando esse sistema apresenta algum tipo de emaranhamento [23].



### 3.3.5 Critério CCNR

Uma outra ferramenta muito eficiente para qualificar estados emaranhados, desenvolvida por Oliver Rudolph (individualmente) e por Kai Chen e Ling-An Wu (em conjunto), baseada na contração linear de estados produto, é o atualmente chamado *critério CCNR*<sup>2</sup> [19]. Esse método foi definido inicialmente por Rudolph como critério CCN, onde ele utilizou a decomposição de Schmidt para identificar se um estado bipartite seria separável [24], mas, diferente do que foi visto na Seção 3.3.2, essa decomposição se aplicava ao espaço dos operadores [18]. Já Chen e Wu, que definiram seu método como matematicamente muito mais simples que o critério CCN de Rudolph, chamaram a sua técnica de método de realinhamento da matriz (operador) densidade e a descreveram como uma simples análise matricial [25].

Como vimos no início da seção, para desenvolverem seus métodos em [24] e [25] foram utilizadas estratégias matemáticas que se diferem em alguns aspectos, por isso, nesta seção, apresentaremos os dois métodos e ao fim algumas considerações serão feitas. Para tanto, utilizaremos o mesmo operador densidade do sistema bipartite definido no estudo do critério PPT, Seção 3.3.3, apresentado abaixo:

$$\hat{\rho} = \sum_{ij,kl} \hat{\rho}_{ij,kl} |\mu_i^A \nu_j^B\rangle \langle \mu_k^A \nu_l^B|. \quad (3.25)$$

#### (I) Método de Rudolph: Critério CCN

Dado o operador densidade  $\hat{\rho}$  definido na equação (3.25), escrevendo esse operador em termos da decomposição de Schmidt para o espaço dos operadores, teremos

$$\hat{\rho} = \sum_i \omega_i \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B, \quad (3.26)$$

onde  $\omega_i \geq 0$  e  $\hat{\rho}_i^A$  e  $\hat{\rho}_i^B$  são bases ortonormais no espaço dos observáveis de  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente.

A base escolhida para a decomposição deve ser de operadores hermitianos onde

$$\mathbf{Tr}(\hat{\rho}_i^A \hat{\rho}_j^A) = \mathbf{Tr}(\hat{\rho}_i^B \hat{\rho}_j^B) = \delta_{ij} \quad (3.27)$$

Isto é, para  $i = j$  teremos o traço do quadrado de  $\hat{\rho}^Z$  ( $Z = A$  ou  $B$ ) que, assim como o delta de Kronecker, resulta em 1 (consultar o Apêndice A).

<sup>2</sup> Do inglês *computable cross norm or realignment*.

Os observáveis que compõem a base escolhida são normalmente chamados de *observável ortogonal local LOO*<sup>3</sup>. De modo semelhante ao que ocorre na decomposição de Schmidt vista na Seção 3.3.2, neste critério há o emparelhamento de pares de observáveis da base escolhida, o que diminui a dimensão do espaço de  $\hat{\rho}$ .

Em seu artigo original, [24] enunciou o seu teorema como definindo a separabilidade de  $\hat{\rho}$ , escrito em termos da decomposição de Schmidt, como o seu traço sendo menor ou igual a unidade. Como o traço de um operador corresponde a somatória dos elementos da sua diagonal principal, seus autovalores, em [18] esse teorema é enunciado como segue:

**Teorema 3.3.5 (Critério CCN).** *Dado um operador densidade  $\hat{\rho}$ , que representa um estado bipartite, se  $\hat{\rho}$  é separável, então o somatório de todos os coeficientes de Schmidt  $\omega_1$  será menor ou igual a unidade:*

$$\sum_i \omega_i \leq 1. \quad (3.28)$$

Então, para o critério CCN, sendo a somatória dos  $\omega_i$  maior que um, o estado deve conter algum emaranhamento.

## (II) Método de Chen e Wu: Método de realinhamento da matriz densidade

Como dissemos no início desta seção, [25] desenvolveu seu método baseado na operação de realinhamento da matriz densidade e, a partir daí, fez uma análise matricial desse novo operador.

Seja o sistema bipartite definido na equação (3.25),

$$\hat{\rho} = \sum_{ij,kl} \hat{\rho}_{ij,kl} |\mu_i^A \nu_j^B\rangle \langle \mu_k^A \nu_l^B|,$$

o realinhamento do operador densidade consiste na permutação de um dos índices dos subsistemas  $A$  e  $B$ . Ou seja, para o operador densidade  $\hat{\rho}$  descrito na relação acima, o seu realinhamento é dado pela troca dos índices  $\nu_j^B$  e  $\mu_k^A$ , como descrito abaixo:

$$\hat{\rho} = \sum_{ij,kl} \hat{\rho}_{ij,kl} |\mu_i^A \mu_k^A\rangle \langle \nu_j^B \nu_l^B|. \quad (3.29)$$

Podemos também efetuar a operação de realinhamento do operador densidade diretamente através de sua matriz. Utilizando esse mesmo operador densidade  $\hat{\rho}$ , vamos

---

<sup>3</sup> Do inglês *local orthogonal observables*.

escrevê-lo na forma matricial utilizando a base  $\{|00\rangle |01\rangle |10\rangle |11\rangle\}$  e dividi-la em blocos, conforme mostrado abaixo, para facilitar a visualização dessa permutação de índices:

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_{00,00} & \hat{\rho}_{00,01} & \hat{\rho}_{00,10} & \hat{\rho}_{00,11} \\ \hat{\rho}_{01,00} & \hat{\rho}_{01,01} & \hat{\rho}_{01,10} & \hat{\rho}_{01,11} \\ \hat{\rho}_{10,00} & \hat{\rho}_{10,01} & \hat{\rho}_{10,10} & \hat{\rho}_{10,11} \\ \hat{\rho}_{11,00} & \hat{\rho}_{11,01} & \hat{\rho}_{11,10} & \hat{\rho}_{11,11} \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Como vimos na equação (3.29), a operação de realinhamento de  $\hat{\rho}$  pode ser definido como uma operação de transposição. Para a matriz  $\hat{\rho}$  descrita acima, que está dividida em blocos, o realinhamento é dado pela transposição de cada bloco em uma linha. Então, o operador densidade realinhado  $\tilde{\rho}$  possui os mesmos elementos de  $\hat{\rho}$ , mas em posições diferentes, veja:

$$\tilde{\rho} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_{00,00} & \hat{\rho}_{00,01} & \hat{\rho}_{01,00} & \hat{\rho}_{01,01} \\ \hat{\rho}_{00,10} & \hat{\rho}_{00,11} & \hat{\rho}_{01,10} & \hat{\rho}_{01,11} \\ \hat{\rho}_{10,00} & \hat{\rho}_{10,01} & \hat{\rho}_{11,00} & \hat{\rho}_{11,01} \\ \hat{\rho}_{10,10} & \hat{\rho}_{10,11} & \hat{\rho}_{11,10} & \hat{\rho}_{11,11} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Após realizar essa operação, [25] enunciou o seguinte teorema:

**Teorema 3.3.6 (Método de realinhamento da matriz densidade).** *Se uma matriz densidade  $\hat{\rho}$ , de dimensão  $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ , é separável, então, para a matriz  $\tilde{\rho}$ , de dimensão  $\mathbb{C}^{m^2} \otimes \mathbb{C}^{n^2}$ , a somatória de todos os valores singulares de  $\tilde{\rho}$  (a somatória da raiz quadrada dos autovalores de  $\tilde{\rho}\tilde{\rho}^\dagger$ ), denotada por  $\|\tilde{\rho}\|$ , será menor ou igual a unidade:*

$$\|\tilde{\rho}\| = \text{Tr} \left( \sqrt{\tilde{\rho}\tilde{\rho}^\dagger} \right) \leq 1. \quad (3.32)$$

Então, para esse método, sendo  $\|\tilde{\rho}\|$  maior que um, o estado deve conter algum emaranhamento.

### Considerações

Analisando os dois métodos acima apresentados, percebemos que a principal diferença entre eles é que [24] utilizou expressões baseadas na notação de Dirac, enquanto [25] se baseou em análise de operações matriciais. No entanto, ambos obtiveram os mesmos resultados, uma decomposição do estado no espaço dos operadores (operador densidade), pois embora essas duas técnicas sejam um pouco diferentes, os seus objetivos levam a

um mesmo fim: a uma contração linear de estados, ou seja, a uma redução de dimensionalidade do estado. Observamos ainda que existe uma equivalência entre a somatória dos coeficientes  $\omega_i$  e o resultado de  $\|\tilde{\rho}\|$ , pois a separabilidade do sistema analisado só é confirmada se esses valores forem maiores ou iguais a unidade. Atualmente, como essas ideias representam o mesmo resultado, elas se fundiram no chamado critério CCNR, que é muito utilizado para detectar emaranhamento em estados onde o critério PPT falha. Esse é um critério necessário, mas em geral, não suficiente para identificar separabilidade [18].

### 3.3.6 Testemunha de Emaranhamento

O critério que apresentaremos a seguir é uma forma necessário e suficiente de identificação de emaranhamento baseado em medidas diretas em observáveis [18]. Podemos definir uma *testemunha de emaranhamento* como um operador hermitiano capaz de identificar se em um estado há emaranhamento ou não, além de identificar a qual tipo de emaranhamento esse estado está associado. Ou seja, uma testemunha de emaranhamento é um observável onde no valor médio (valor esperado) do seu produto com o operador densidade do sistema, há informações sobre o emaranhamento nesse estado onde ele agiu. Segundo Horodecki *et al.* [19], a designação do termo testemunha de emaranhamento atribuída aos operadores com essa capacidade foi introduzido por B. M. Terhal, a partir de um trabalho publicado em 2000 na *Physical Review Letter*.

Normalmente, o operador testemunha de emaranhamento é representado pela letra  $\mathcal{W}$ <sup>4</sup> e sua ação sobre o operador densidade possui valor esperado positivo ou nulo para todos os estados separáveis e negativo para os estados emaranhados. Matematicamente falando, a identificação de emaranhamento pela testemunha  $\mathcal{W}$  será dada por:

**Definição 3.3.3 (Testemunha de Emaranhamento).** *Um operador  $\mathcal{W}$  é chamado de testemunha de emaranhamento se*

$$\langle \mathcal{W}\hat{\rho} \rangle = \mathbf{Tr} [\mathcal{W}\hat{\rho}] \begin{cases} \geq 0 & \text{para todo } \hat{\rho} \text{ separável,} \\ < 0 & \text{para pelo menos um } \hat{\rho} \text{ emaranhado.} \end{cases} \quad (3.33)$$

Em [19], de acordo com Horodecki *et al.*, B. M. Terhal demonstrou, em um trabalho publicado em 2000 na *Physical Letter A*, que a violação das desigualdades de Bell

<sup>4</sup> Do inglês *Witness* (testemunha).

pode ser expressa como um exemplo de testemunha de emaranhamento, pois a medida definida por essas desigualdades testemunha o emaranhamento do estado analisado.

Como vimos acima, a ideia central deste critério é que o valor esperado de  $\mathcal{W}$  será diferente para estados separáveis e para estados emaranhados. De acordo com os Horodecki, em [19], um operador se caracteriza principalmente como uma testemunha de emaranhamento se:

- (i) Possuir pelo menos um autovalor negativo;
- (ii) Possuir um valor médio não-negativo para os estado produto ou, equivalentemente, satisfaça a condição de não negatividade apresentada na relação (3.33).

Por fazerem medidas de quantidades diretas, as testemunhas de emaranhamento são consideradas ferramentas muito eficientes para a análise de emaranhamento. Por isso, esse método é considerado um dos melhores procedimentos para detecção experimental de emaranhamento [18]. Então, sempre que  $\hat{\rho}$  tiver algum grau de emaranhamento, haverá um  $\mathcal{W}$  para testemunhá-lo.

Pela relação (3.33), vimos que este critério identifica o emaranhamento com o traço do produto de dois operadores hermitianos ( $\mathcal{W}$  e  $\hat{\rho}$ ) que agem sobre  $\mathcal{H}$ . Em [22], Aolita descreve essa operação como um produto interno bem definido nesse espaço de fases, pois quando na relação (3.33) obtivermos um resultado nulo ( $\text{Tr}[\mathcal{W}\hat{\rho}] = 0$ ), ela corresponderá a equação de um hiperplano<sup>5</sup> pertencente ao conjunto dos operadores densidade que agem sobre o conjunto convexo<sup>6</sup> de estados  $\mathcal{H}$ , sendo  $\mathcal{W}$  a normal do hiperplano e  $\text{Tr}[\mathcal{W}\hat{\rho}]$  é a projeção de  $\hat{\rho}$  ortogonal a esse hiperplano. Dessa forma,  $\mathcal{W}$  divide o conjunto do espaço de fases em dois subconjuntos, sendo um com os estados emaranhados testemunhados  $\langle \mathcal{W}\hat{\rho} \rangle < 0$  e o outro com os que ele não conseguiu identificar  $\langle \mathcal{W}\hat{\rho} \rangle \geq 0$ . Como vimos acima, o critério de testemunha de emaranhamento possui um significado geométrico claro no espaço de fases, esse significado geométrico de  $\mathcal{W}$  se baseia no teorema

<sup>5</sup> Em geometria, seja um conjunto convexo e fechado  $D$  de dimensão  $d$ , um hiperplano em  $D$  é um ente geométrico, de dimensão  $d - 1$ , que divide  $D$  em dois semi-espacos convexos e fechados. Em nosso caso, como estamos tratando com espaços de fases de sistemas bipartites, portanto de dimensão 2, o hiperplano nesse espaço será uma reta.

<sup>6</sup> Em geometria, um conjunto  $C$  de um espaço vetorial é dito convexo se para quaisquer pontos  $a$  e  $b$ , pertencentes a  $C$ , o segmento que une os pontos  $a$  e  $b$  estiver contido em  $C$ . Para o espaço de Hilbert ( $\mathcal{H}$ ) de estados, os pontos  $a$  e  $b$  são interpretados como estados.

de separação de Hahn-Banach<sup>7</sup>, pois  $\mathcal{H}$ , que representa um hiperplano no conjunto convexo de estados  $\mathcal{H}$ , ao identificar um operador  $\hat{\rho}$  que contém emaranhamento no conjunto  $\mathcal{H}$ , separa esse operador dos outros. É como se ele cortasse o espaço de fases isolando o estado emaranhado identificado [18], veja na Figura 3.2.

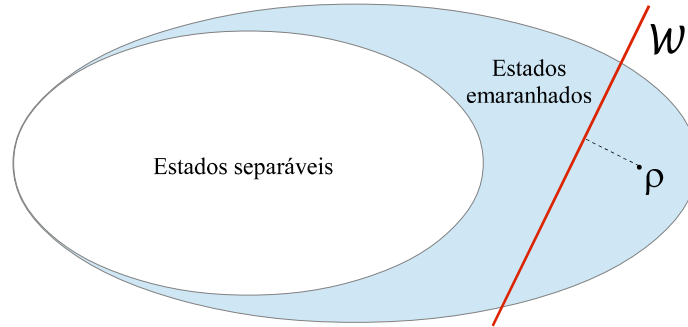


Figura 3.2: O observável  $\mathcal{W}$  é uma testemunha de emaranhamento para o estado  $\rho$ .

Na Figura 3.2, temos a representação geométrica do que foi descrito acima, sendo a linha tracejada, que representa  $(\text{Tr}[\mathcal{W}\hat{\rho}])$ , interpretada como a distância entre  $\hat{\rho}$  e o hiperplano de  $\mathcal{W}$ <sup>8</sup>, ou seja, enquanto menor essa distância, mas negativo será o valor esperado na equação (3.33).

Uma limitação marcante do critério testemunha de emaranhamento é que não existe um operador testemunha de emaranhamento universal que, por exemplo, identifique todos os estados emaranhados dentro de um mesmo espaço de fases  $\mathcal{H}$ . Ou seja, para um tipo específico de emaranhamento existe uma testemunha  $\mathcal{W}$  que irá identificá-lo. No entanto, existe uma diferença entre as várias testemunhas de emaranhamento, que leva umas a serem mais eficientes que outras, e essa eficiência é devido a sensibilidade desse operador testemunha na identificação de operadores densidade de estados emaranhados. A partir dessas ideias, uma testemunha  $\mathcal{W}_O$  é considerada mais sensível ou fina que  $\mathcal{W}$  se, e somente se,  $\mathcal{W}_O$  conseguir detectar todos os operadores densidade que representam estados emaranhados já detectados por  $\mathcal{W}$ , além dos detectados por ela [16]. Daí vem o conceito de *testemunhas ótimas de emaranhamento* que definimos abaixo:

**Definição 3.3.4 (Testemunha Ótima de Emaranhamento).** *Uma testemunha  $\mathcal{W}_O$  é chamada de testemunha ótima de emaranhamento se, dentro de um mesmo espaço de*

<sup>7</sup> Em geometria convexa, seja um conjunto convexo  $A$  e um subconjunto convexo  $S$ , onde  $S \subset A$ , se houver um ponto  $p$  que não pertença a esse subconjunto  $S$ , então haverá sempre um hiperplano  $M$  que irá separar esse ponto de  $S$  cortando o conjunto  $A$ .

<sup>8</sup> Para maiores detalhes sobre a geometria abordada aqui, consulte o apêndice da referência [34].

fases  $\mathcal{H}$ , não houver outra testemunha mais fina ou sensível que ela.

Como vimos anteriormente, no conjunto composto pelo espaço de fases  $\mathcal{H}$ , a representação geométrica para uma testemunha de emaranhamento é um hiperplano que corta esse conjunto separando o operador densidade do estado emaranhado identificado dos outros. Geometricamente, uma testemunha ótima de emaranhamento,  $\mathcal{W}_O$ , representa um hiperplano que corta o espaço de fases tangenciando ou se aproximando o máximo possível do conjunto de estados separáveis. Isto é, enquanto mais próximo do conjunto de estados separáveis estiver localizado o hiperplano que corta o conjunto  $\mathcal{H}$ , melhor será considerada essa testemunha. Essa descrição pode ser vista na Figura 3.3.

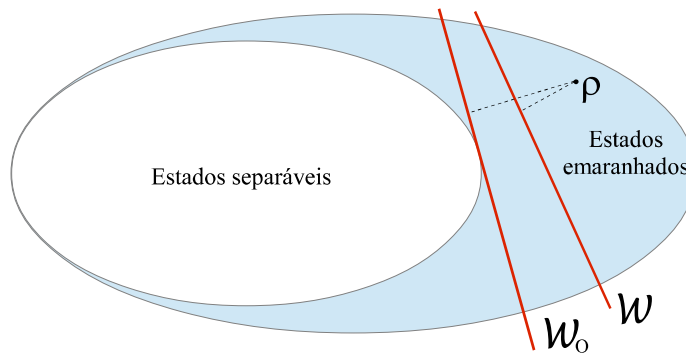


Figura 3.3: Aqui temos uma comparação entre duas testemunhas de emaranhamento, onde a testemunha  $\mathcal{W}_O$  é uma testemunha ótima de emaranhamento por ser mais sensível que a testemunha  $\mathcal{W}$ .

De acordo com [18], existem várias técnicas que podem ser utilizadas para a construção do operador testemunha de emaranhamento, no entanto, aqui abordaremos apenas duas formas de construção de  $\mathcal{W}$ : uma baseada em operadores densidade com transposta parcial negativa e a outra para estados puros.

Seja um operador densidade  $\hat{\rho}_\eta$ , que representa um sistema bipartite, cuja transposta parcial é negativa, isto é, ao aplicarmos a operação de transposição parcial em qualquer um dos subsistemas desse operador densidade  $\hat{\rho}_\eta^{T_i}$ , com  $i = A$  ou  $B$ , teremos como resultado pelo menos um dos seus autovalores negativos  $\lambda_-$ , que leva ao emaranhamento desse operador. Uma vez que para todo autovalor existe um autovetor correspondente (consulte o Apêndice A), então, a esse autovalor negativo  $\lambda_-$  corresponde um autovetor  $|\eta\rangle$ . Dessa forma, podemos construir a testemunha de emaranhamento para o operador densidade  $\hat{\rho}_\eta$  a partir do produto externo do vetor complementar desse autovetor,  $\langle\eta|$ , com a transposta parcial de  $|\eta\rangle$ ,  $|\eta\rangle^{T_i}$ , isto é:

$$\mathcal{W}_{\rho_\eta} = |\eta\rangle\langle\eta|^{T_i}. \quad (3.34)$$

Essa testemunha pode ser definida dessa forma, porque quando calculamos o traço da ação de  $\mathcal{W}_{\rho_\eta}$  em  $\rho_\eta$ , obtemos como resultado o próprio autovalor negativo  $\lambda_-$ , o que nos leva à relação (3.33). Isto é,

$$\begin{aligned}\mathbf{Tr} [\mathcal{W}_{\rho_\eta} \rho_\eta] &= \mathbf{Tr} [|\eta\rangle\langle\eta|^{T_i} \rho_\eta] \\ &= \mathbf{Tr} [|\eta\rangle\langle\eta| \rho_\eta^{T_i}] \\ &= \lambda_-.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Já para um estado puro emaranhado  $|\psi\rangle$ , sua testemunha de emaranhamento  $\mathcal{W}_\psi$  pode ser construída a partir de uma operação do valor  $\alpha$ , sobre a qual falaremos mais a frente, com o operador identidade e o seu projetor. Assim, teremos:

$$\mathcal{W}_\psi = \alpha \hat{\mathbf{1}} - |\psi\rangle\langle\psi|.\tag{3.36}$$

A fidelidade de  $|\psi\rangle$  no estado misto  $\hat{\rho}_\psi$  é dada pelo valor  $\mathbf{Tr} [\hat{\rho}_\psi |\psi\rangle\langle\psi|] = \langle\psi|\hat{\rho}_\psi|\psi\rangle$ , isto é, essa fidelidade representa a probabilidade de termos o estado  $|\psi\rangle$  em  $\hat{\rho}_\psi$  após realizarmos uma medição no sistema (o que as vezes é chamado de superposição entre dois estados). A relação (3.36) nos diz que se essa fidelidade excede ao valor crítico  $\alpha$ , então o valor esperado da testemunha  $\mathcal{W}_\psi$  será negativo e o estado deve estar emaranhado, como mostra a relação (3.33).

O termo  $\alpha$  da relação (3.36) pode ser interpretado como uma função linear que toma o valor máximo em um dos pontos extremos pertencentes a um conjunto convexo, onde esse ponto extremo do conjunto representa um estado separável, ou seja, estados produto puros. Dessa forma, valor de  $\alpha$  é calculado a partir do traço da ação entre um estado separável  $|\phi\rangle$  (ou o seu operador densidade  $\hat{\rho}_\phi$ ), pertencente a base de  $|\psi\rangle$ , e  $|\psi\rangle$ . Ou seja, teríamos  $\alpha$  tomando:

$$\alpha = \max_{\hat{\rho}_\phi \text{ separável}} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_\phi |\psi\rangle\langle\psi|] = \max_{|\phi\rangle \text{ separável}} |\langle\psi|\phi\rangle|^2\tag{3.37}$$

O que torna esse teste confiável é que deve-se calcular o maior valor possível de  $\alpha$  para garantir a positividade de  $\mathcal{W}_\psi$  em todos os estados separáveis. Conforme [18], esse máximo valor de  $\alpha$  pode ser calculado diretamente a partir da decomposição de Schmidt do estado separável  $|\phi\rangle$ . Nesse caso  $\alpha$  será dado pelo quadrado do máximo coeficiente de Schmidt de  $|\phi\rangle$ . Isto é, sendo  $|\phi\rangle = \sum_{k=1} \lambda_k |\mu_k \nu_k\rangle$  a sua decomposição de Schmidt, então teremos  $\alpha$  dado por:

$$\alpha = \max_{|\phi\rangle \text{ separável}} \left\{ \max_{\text{coeficiente de Schmidt } \lambda_k} (\lambda_k)^2 \right\}.\tag{3.38}$$



### 3.4 Explorando a separabilidade

Para melhor compreendermos o que foi visto até aqui, iremos utilizar o estado de Bell  $|\Gamma_+\rangle$ , apresentado na Seção 2.5, para testar alguns dos critérios de separabilidade vistos nas seções anteriores. Embora a comunidade científica reconheça que tal estado é uma representação genuína de um estado puro emaranhado, a aplicação de tais testes se faz necessária como uma ferramenta interpretativa dos critérios estudados.

Seja o estado de Bell  $|\Gamma_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ . Seu operador densidade é dado por:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\Gamma_+} &= |\Gamma_+\rangle\langle\Gamma_+| \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|).\end{aligned}\quad (3.39)$$

Calculando o operador densidade reduzido para o primeiro subsistema desse estado  $\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A$ , o que é equivalente a calcular o traço parcial sobre o segundo subsistema, teremos:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A &= \mathbf{Tr}_B [\hat{\rho}_{\Gamma_+}] \\ &= \mathbf{Tr}_B \left[ \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \right] \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| \langle 0|0\rangle + |0\rangle\langle 1| \langle 0|1\rangle + |1\rangle\langle 0| \langle 1|0\rangle + |1\rangle\langle 1| \langle 1|1\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|).\end{aligned}\quad (3.40)$$

Verificando a idempotência de  $\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A$ :

$$\begin{aligned}(\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A)^2 &= \left[ \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} (\langle 0|0\rangle|0\rangle\langle 0| + \langle 0|1\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle 1|0\rangle|1\rangle\langle 0| + \langle 1|1\rangle|1\rangle\langle 1|) \\ &= \frac{1}{4} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)\end{aligned}\quad (3.41)$$

Logo, como  $\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A \neq (\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A)^2$ , eles não são idempotentes e, pela relação (3.12),  $|\Gamma_+\rangle$  é emaranhado.

Vamos calcular o traço de  $(\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A)^2$  para testar a relação (3.11):

$$\begin{aligned}\mathbf{Tr} [(\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A)^2] &= \mathbf{Tr} \left[ \frac{1}{4} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \right] \\ &= \frac{1}{4} (\langle 0|0\rangle + \langle 1|1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}\quad (3.42)$$

Como não poderia ser diferente, pela equação (3.11), sendo  $\mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A]^2 < 1$ , temos que  $|\Gamma_+\rangle$  é emaranhado.

Utilizando o mesmo estado  $|\Gamma_+\rangle$ , vamos testar com a decomposição de Schmidt o seu emaranhamento. Como vimos no fim da Seção 3.3.2, a escolha da base para a decomposição de Schmidt pode ser encontrada em termos do operador densidade reduzido do sistema. Portanto, utilizando a equação (3.40), vamos escrever a matriz  $\gamma$ , que representa esse sistema:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Como  $\gamma$  é hermitiano, pois  $\gamma = \gamma^\dagger$ , teremos que:

$$\begin{aligned} \gamma^\dagger \gamma &= \gamma^2 \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Calculando os autovalores de  $\gamma^\dagger \gamma$  a partir da sua equação característica  $\det(\gamma^\dagger \gamma - \varepsilon \hat{\mathbf{1}}) = 0$ :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \varepsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \varepsilon \end{vmatrix} &= 0 \\ \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2 = 0 &\Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Como podemos observar, o estado  $|\Gamma_+\rangle$  possui dois autovalores não-nulos e iguais:  $\varepsilon_1 = \lambda_1^2 = \frac{1}{2}$  e  $\varepsilon_2 = \lambda_2^2 = \frac{1}{2}$ , onde os  $\lambda_i^s$  são os coeficientes de Schmidt. Então, pelo que foi visto na Seção 3.3.2, como o número de Schmidt  $N_{\lambda_k}$  é igual a dois (pois temos dois autovalores), concluimos que o estado  $|\Gamma_+\rangle$  é emaranhado.

Dando continuidade aos nossos testes dos critérios de separabilidade, vamos aplicar o critério PPT para verificar a positividade do operador densidade. Para tanto, utilizaremos o operador densidade  $\hat{\rho}_{\Gamma_+}$ , descrito na equação (3.39), e vamos escrevê-lo em termos da base  $\{|00\rangle |01\rangle |10\rangle |11\rangle\}$ .

$$\hat{\rho}_{\Gamma_+} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Sua transposta parcial para o sistema  $A$ ,  $\hat{\rho}_{\Gamma_+}^{TA}$ , será:

$$\hat{\rho}_{\Gamma_+}^{TA} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Calculando os autovalores de  $\hat{\rho}_{\Gamma_+}^{TA}$  pela  $\det(\hat{\rho}_{\Gamma_+}^{TA} - \varepsilon \hat{\mathbf{1}}) = 0$ :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0, \quad (3.48)$$

resolvendo o determinante acima, encontramos o conjunto de autovalores:  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ .

Pelo teorema 3.3.2, vemos que de acordo com o critério PPT, como  $\hat{\rho}_{\Gamma_+}^{TA}$  possui um autovalor negativo, ou seja, esse operador não é positivo semi-definido, logo,  $|\Gamma_+\rangle$  é um estado emaranhado, como esperado.

Agora aplicaremos o critério CCNR, apresentado na Seção 3.3.5, mas daremos ênfase à versão apresentada por Chen e Wu no Teorema 3.3.6. Utilizando a matriz densidade  $\hat{\rho}_{\Gamma_+}$ , vista acima, aplicando o realinhamento de matriz, teremos  $\tilde{\rho}_{\Gamma_+}$

$$\tilde{\rho}_{\Gamma_+} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Calculando  $\tilde{\rho}_{\Gamma_+} \tilde{\rho}_{\Gamma_+}^\dagger$

$$\tilde{\rho}_{\Gamma_+} \tilde{\rho}_{\Gamma_+}^\dagger = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Calculando os autovalores de  $\tilde{\rho}_{\Gamma_+} \tilde{\rho}_{\Gamma_+}^\dagger$  por  $\det(\tilde{\rho}_{\Gamma_+} \tilde{\rho}_{\Gamma_+}^\dagger - \varepsilon \hat{\mathbf{1}}) = 0$ , encontramos o conjunto de autovalores  $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$ . Agora, vamos calcular  $\|\tilde{\rho}_{\Gamma_+}\|$ , que é igual a somatória da raiz

quadrada dos autovalores de  $\tilde{\rho}_{\Gamma_+} \tilde{\rho}_{\Gamma_+}^\dagger$ , temos:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\rho}_{\Gamma_+}\| &= \mathbf{Tr} \left[ \sqrt{\tilde{\rho}_{\Gamma_+} \tilde{\rho}_{\Gamma_+}^\dagger} \right] \\ &= \sum_{i=1}^4 \left( \sqrt{\frac{1}{4}} \right)_i \\ &= 2 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Como  $\|\tilde{\rho}_{\Gamma_+}\| = 2$ , logo, pelo critério CCNR visto na Seção 3.3.5,  $|\Gamma_+\rangle$  é um estado emaranhado.

Finalmente, vamos aplicar o critério da testemunha de emaranhamento, visto na Seção 3.3.6, em  $|\Gamma_+\rangle$  para verificar seu emaranhamento. Sendo  $|\Gamma_+\rangle$  um estado puro, então vamos usar a relação (3.36) para encontrar o operador testemunha  $\mathcal{W}_{\Gamma_+}$ . Inicialmente, vamos definir o estado separável para o teste a partir das bases de  $|\Gamma_+\rangle$ , logo:

$$|\phi\rangle = |00\rangle + |01\rangle. \tag{3.52}$$

Como o operador densidade para  $|\Gamma_+\rangle$  já foi calculado no início desta seção, vamos calcular o valor de  $\alpha$  a partir da relação (3.37):

$$\begin{aligned} \alpha &= |\langle\phi|\Gamma_+\rangle|^2 \\ &= \langle\phi|\Gamma_+\rangle\langle\Gamma_+|\phi\rangle \\ &= (\langle 00| + \langle 01|) \left( \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \right) (|00\rangle + |01\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle 00|00\rangle\langle 00|00\rangle + \langle 00|00\rangle\langle 11|00\rangle + \langle 00|11\rangle\langle 00|00\rangle + \langle 00|11\rangle\langle 11|00\rangle + \\ &\quad + \langle 00|00\rangle\langle 00|01\rangle + \langle 00|00\rangle\langle 11|01\rangle + \langle 00|11\rangle\langle 00|01\rangle + \langle 00|11\rangle\langle 11|01\rangle + \\ &\quad + \langle 01|00\rangle\langle 00|00\rangle + \langle 01|00\rangle\langle 11|00\rangle + \langle 01|11\rangle\langle 00|00\rangle + \langle 01|11\rangle\langle 11|00\rangle + \\ &\quad + \langle 01|00\rangle\langle 00|01\rangle + \langle 01|00\rangle\langle 11|01\rangle + \langle 01|11\rangle\langle 00|01\rangle + \langle 01|11\rangle\langle 11|01\rangle) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Calculando a testemunha  $\mathcal{W}_{\Gamma_+} = \alpha \hat{\mathbf{1}} - \hat{\rho}_{\Gamma_+}$ , escrevendo em forma de matriz

$$\mathcal{W}_{\Gamma_+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.54}$$

Encontrando agora  $\mathbf{Tr}[(\mathcal{W}_{\Gamma_+}) \cdot (\hat{\rho}_{\Gamma_+})]$

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr}[(\mathcal{W}_{\Gamma_+}) \cdot (\hat{\rho}_{\Gamma_+})] &= \mathbf{Tr} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Logo, em conformidade ao que foi enunciado na Seção 3.3.6, o valor de  $\mathbf{Tr}[(\mathcal{W}_{\Gamma_+}) \cdot (\hat{\rho}_{\Gamma_+})] = -\frac{1}{2} < 0$ , confirma o emaranhamento no estado  $|\Gamma_+\rangle$ .

Foram apresentados neste capítulo conceitos fundamentais em sistemas bipartites para a compreensão e identificação dessa propriedade tão característica da Mecânica Quântica: o Emaranhamento Quântico. Analisamos as diferenças entre estados emaranhados e separáveis, sendo estes puros ou mistos. Também exploramos alguns critérios ou qualificadores de emaranhamento, ferramentas essenciais para a identificação desses estados. No entanto, ainda falta descobrirmos como mensurar o nível de emaranhamento conferido a esses sistemas. Por isso, no próximo capítulo apresentaremos alguns quantificadores de emaranhamento e suas principais características.

## 4 Quantificadores de Emaranhamento

### 4.1 Requisitos para bons quantificadores

Nas seções anteriores, conhecemos alguns bons critérios que caracterizam o emaranhamento em um sistema bipartite dado. No entanto, além de identificar o emaranhamento, há a necessidade de quantificar o grau desse emaranhamento. Isto é, devemos mensurar o nível de emaranhamento que o sistema possui para, assim, sabermos qual a melhor forma de utilizarmos essa informação.

Uma consequência direta das medidas de emaranhamento é que estas também exprimem uma condição de separabilidade [21]. Por isso, houve a necessidade de discutir quais seriam os requisitos necessários que definiriam bons quantificadores, ou seja, quais propriedades uma boa medida de emaranhamento deve obedecer [16]. Devemos destacar, no entanto, que nem todas as propriedades apresentadas a seguir são suficientes para todos os quantificadores de emaranhamento que iremos explorar [18]. Isso ocorre porque ainda existe muita dificuldade na mensuração do grau de emaranhamento nos estados, pois ao realizarmos medidas nos sistemas quânticos, perturbamos esses sistemas. A seguir apresentaremos três das propriedades mais discutidas na literatura.

#### Propriedade 4.1.1 (Medidas de Emaranhamento).

*Seja  $E[\hat{\rho}]$  uma medida de emaranhamento realizada sob o operador  $\hat{\rho}$  do sistema composto pelos subsistema  $A$  e  $B$ . Podemos classificar  $E[\hat{\rho}]$  como uma boa medida de emaranhamento se ela abrange as propriedades abaixo.*

- (i) Se  $E[\hat{\rho}] = 0$ , então  $\hat{\rho}$  é separável, pois não existem correlações quânticas entre seus subsistemas.*
- (ii)  $E[\hat{\rho}]$  deve ser invariante sob mudanças de bases locais, que são operações reversíveis, deste modo, essa medida não sofrerá variações sob transformações unitárias locais. Sejam  $U^A$  e  $U^B$  operações unitárias locais,*

então teremos que

$$E[\hat{\rho}] = E[(U^A \otimes U^B)\hat{\rho}(U^A \otimes U^B)^\dagger]. \quad (4.1)$$

(iii) *Essa propriedade é um pouco mais restritiva que a (ii), pois ela aumenta a dificuldade em se conseguir medidas confiáveis de emaranhamento. Sendo o emaranhamento definido por correlações quânticas, essa propriedade define que as medidas de emaranhamento não devem aumentar se forem realizadas operações locais e comunicação clássica com o sistema analisado, o que é chamado de monotonicidade do emaranhamento. Seja  $\Lambda^{LOCC}$  um mapa positivo (operador) que atua sob o operador densidade  $\hat{\rho}$ , então teremos que*

$$E[\hat{\rho}] \geq E[\Lambda^{LOCC} \hat{\rho}]. \quad (4.2)$$

*Isto é, ao realizarmos qualquer operação em um dos subsistemas de  $\hat{\rho}$ , que resulte em um operador  $\hat{\rho}_d$  com probabilidade  $p_d$  (com  $p_d > 0$  e  $\sum p_d = 1$ ), quando refizermos a medida de emaranhamento nesse sistema, o seu valor não poderá ser maior que o valor medido antes da operação:*

$$E[\hat{\rho}] \geq \sum_d p_d E[\hat{\rho}_d]. \quad (4.3)$$

A propriedade (i) se autocomprova, pois se a medida de emaranhamento realizada sobre um sistema é nula, significa que seus subsistemas não estão emaranhados, logo os estados são separáveis e não possuem qualquer correlação quântica. Na (ii), como podemos ver no Apêndice A, Seção A.3, os autovalores de um operador densidade  $\hat{\rho}$  são invariantes mediante transformações unitárias locais, daí, a medida de emaranhamento  $E(\hat{\rho})$ , que é calculada a partir desses autovalores, não irá variar mediante essas transformações. Da (iii), teremos que ao realizarmos qualquer operação em um dos subsistemas  $\hat{\rho}$ , o valor de  $E(\hat{\rho})$  não deverá aumentar. Essa monotonicidade apresentada em (iii), segundo [18], pode ser vista como um caso particular da propriedade (ii), pois ela implica na invariância do emaranhamento mediante transformações unitárias locais.

Para estados bipartite puros e mistos, existem boas medidas de emaranhamento que conseguem satisfazer simultaneamente as propriedade (i), (ii) e (iii). No entanto, esses estados são uma minoria. Na maior parte dos casos, normalmente para os estados mistos, são satisfeitas simultaneamente apenas duas dessas propriedades. A

seguir, serão apresentados três dos quantificadores de emaranhamento mais discutidos na literatura: *entropia de von Neumann*, *concorrência* e *negatividade*.

## 4.2 Entropia de von Neumann

A primeira ideia de utilização da entropia como uma medida nasceu na Termodinâmica Clássica, em 1865, que evoluiu até a atualmente conhecida, Segunda Lei da Termodinâmica. Nesse contexto, a entropia é interpretada como uma medida do grau de desordem de um sistema. Com o desenvolvimentos da Teoria da Informação Clássica com Claude Shannon, a entropia é apresentada como uma medida de informação sobre o sistema, isto é, uma “teoria matemática para a comunicação”. Nesse aspecto, Shannon quantificou estatisticamente a medida de informação de uma mensagem baseado na incerteza (grau de dificuldade) de previsão dessa mensagem, que ficou conhecido como Entropia de Shannon. Em [30], Tavares afirma que esta interpretação dada a entropia por Shannon foi sugerido por von Neumann (para maiores informações sobre entropia consulte a referência [30]).

Dentro do contexto quântico, em seu livro “Fundamentos Matemáticos da Mecânica Quântica”<sup>1</sup> de 1932, John von Neumann apresentou a generalização da entropia da Mecânica Estatística, que ficou conhecida como *entropia de von Neumann*, em homenagem ao seu criador, que será apresentada abaixo.

**Definição 4.2.1 (Entropia de von Neumann).** *Seja um operador densidade  $\hat{\rho}$  do sistema composto pelos subsistemas  $A$  e  $B$ . A entropia de von Neumann  $S[\hat{\rho}]$  será definida como*

$$S[\hat{\rho}] = -\mathbf{Tr}[\hat{\rho} \log \hat{\rho}]. \quad (4.4)$$

onde o logaritmo está na base 2.

Como dissemos no início desta seção, em Termodinâmica, onde o termo entropia nos é mais familiar, seu conceito nos remete a uma medida do grau de desordem de um sistema. Já em Mecânica Estatística e Teoria da Informação, onde o estudo do emaranhamento possui maior importância, a entropia é interpretada como uma medida de informação a respeito dos sistemas. De certa forma, podemos generalizar que, matematicamente, a entropia de von Neumann é uma versão quântica da entropia clássica.

<sup>1</sup> Título original: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*.



Para sistemas bipartites, a entropia de von Neumann quantifica o emaranhamento a partir de um dos seus subsistemas [26]. Utilizando a decomposição de Schmidt, vista na Seção 3.3.2, onde o estado representado por  $\hat{\rho}$  será reescrito em termos da somatória do produto dos seus autovalores com os vetores de base, podemos representar a entropia de von Neumann em termo dos autovalores de  $\hat{\rho}$ . Neste caso, sendo uma das bases de  $\hat{\rho}$  dada por  $\{\psi_i\}$ , vamos analisar o seu traço com relação a essa base e verificar como ficará a equação (4.4) em termos dos autovalores de  $\hat{\rho}$ .

$$\begin{aligned}
S[\hat{\rho}] &= -\mathbf{Tr}[\hat{\rho} \log \hat{\rho}] \\
&= -\mathbf{Tr}[(\log \hat{\rho}) \hat{\rho}] \\
&= -\sum_{i=1}^d \langle \psi_i | (\log \hat{\rho}) \hat{\rho} | \psi_i \rangle \\
&= -\sum_{i=1}^d \lambda_i \langle \psi_i | \log \hat{\rho} | \psi_i \rangle \\
&= -\sum_{i=1}^d \lambda_i \log \lambda_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle \\
&= -\sum_{i=1}^d \lambda_i \log \lambda_i
\end{aligned} \tag{4.5}$$

onde  $\sum_{i=1}^d \lambda_i = 1$  e  $d$  é a dimensão do espaço produto.

A entropia de von Neumann possui duas propriedades fundamentais, que serão apresentadas a seguir.

#### Propriedade 4.2.1 (Entropia de von Neumann).

(i) *Se  $\hat{\rho}$  é um estado puro separável, então sua entropia  $S[\hat{\rho}]$  será mínima.*

Seja  $\hat{\rho} = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  um estado separável. Como já vimos ele é idempotente, então terá apenas um autovalor não nulo sendo  $\lambda_1 = 1$ . Utilizando a relação (4.5), onde  $d = 1$ , teremos a entropia nesse estado dada por:

$$S[\hat{\rho}] = -1 \log 1 = 0. \tag{4.6}$$

(ii) *Para um operador densidade  $\hat{\rho}$  de um sistema composto por subsistemas  $A$  e  $B$ , com dimensão do espaço de fases dado por  $d$ , a sua entropia  $S[\hat{\rho}]$  pertence ao intervalo  $[0, \log d]$ .*

Vamos calcular os valores extremos para a relação (4.5). Para isso, sendo  $\sum_i \lambda_i = 1$  (pois estamos tratando com probabilidades), reescrevemos essa

relação em termos de  $\lambda_i$  e  $\lambda_d$ , onde  $i \neq d$ , então:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \lambda_i = 1 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i + \lambda_d = 1 \\ \lambda_d &= 1 - \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

Vamos escrever a entropia  $S[\lambda_l]$ , onde  $\lambda_l$  é um autovalor qualquer dentro do conjunto de autovalores de  $\lambda_i$  a  $\lambda_d$ , sendo  $l \neq d \neq i$ :

$$S[\lambda_l] = - \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \log \lambda_i - \lambda_d \log \lambda_d. \quad (4.8)$$

Vamos derivar  $S[\lambda_l]$  em relação a  $\lambda_l$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S[\lambda_l]}{\partial \lambda_l} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_l} \left( - \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \log \lambda_i - \lambda_d \log \lambda_d \right) \\ &= - \sum_{i=1}^{d-1} \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial \lambda_l} \log \lambda_i + \frac{\partial \lambda_i}{\partial \lambda_l} \right) - \frac{\partial \lambda_d}{\partial \lambda_l} \log \lambda_d + \frac{\partial \lambda_d}{\partial \lambda_l} \end{aligned} \quad (4.9)$$

A partir da relação(4.7), vamos calcular  $\frac{\partial \lambda_d}{\partial \lambda_l}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_d}{\partial \lambda_l} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_l} \left( 1 - \lambda_l - \sum_{i=1}^{d-2} \lambda_i \right) \\ &= - \frac{\partial \lambda_l}{\partial \lambda_l} - \frac{\partial}{\partial \lambda_l} \left( \sum_{i=1}^{d-2} \lambda_i \right) \\ &= -1 + \sum_{i=1}^{d-2} \delta_{id} \\ &= -1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Substituindo esse resultado na relação (4.9), teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial S[\lambda_l]}{\partial \lambda_l} &= - \sum_{i=1}^{d-1} (\delta_{il} \log \lambda_i + \delta_{il}) - (-1) \log \lambda_d + (-1) \\ &= - \log \lambda_l - 1 + \log \lambda_d + 1 \\ &= - \log \lambda_l + \log \lambda_d \\ &= \log \frac{\lambda_d}{\lambda_l} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Quando  $\lambda_l$  for máximo, a relação (4.11) será zero, isto é, para  $\lambda_l = \lambda_d$ , então  $\lambda_l^{max} = \lambda_d \Rightarrow \lambda_l^{max} = \frac{1}{d}$ , pois estamos tratando com probabilidades.

Dessa forma, o valor local máximo  $S^{max}$  será dado por

$$\begin{aligned} S^{max} &= S\left(\frac{1}{d}\right) \\ &= - \sum_{i=1}^d \frac{1}{d} \log \frac{1}{d} \\ &= \log d. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Onde  $S^{max}$  é o único valor máximo local, ele é global, e o valor mínimo global  $S^{min} = 0$ , pois  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ .

A partir das considerações acima, considere um estado puro  $|\Psi\rangle$ , composto pelos subsistemas  $A$  e  $B$ , cujo operador densidade será dado por  $\hat{\rho}$  e os seus operadores densidade reduzidos por  $\hat{\rho}^A$  e  $\hat{\rho}^B$ . A entropia do emaranhamento para esse estado  $E[\Psi] = E[\hat{\rho}]$ , ou seja, a medida de emaranhamento desse sistema estará no intervalo  $[0, 1]$  ou

$$0 \leq E[\Psi] = S[\hat{\rho}^A] = S[\hat{\rho}^B] \leq 1. \quad (4.13)$$

Como vimos na Seção 3.3.2, onde estudamos a relação dos operadores densidade reduzidos com a decomposição de Schmidt, os autovalores dos operadores densidade reduzidos para estados bipartite puros são iguais. Por isso, concluímos que o cálculo da medida da entropia de von Neumann para esses casos independe do subsistema, já que  $S[\hat{\rho}^A] = S[\hat{\rho}^B]$ .

Ainda para o estado puro bipartite apresentado acima, se o cálculo da sua medida de emaranhamento equivale a  $E[\Psi] = \log d$ , com  $d$  representando a dimensão do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , podemos afirmar que esse estado é maximamente emaranhado.

Esta entropia quântica, a entropia de von Neumann, é uma ferramenta muito utilizada para a quantificação do emaranhamento em estados puros, isto é, a quantificação de emaranhamento por meio da entropia de von Neumann só é considerada eficiente quando se trata de sistemas puros, pois nesses casos ela nos fornece resultados seguros. No entanto, para os casos de sistemas mistos, ela não é confiável, pois nesses casos, há vários níveis de correlações entre as partes: as clássicas, que são intrínsecas aos sistemas mistos, e as quânticas, que definem o emaranhamentos dos sistemas [16].

## 4.3 Concorrência

Um quantificador de emaranhamento para sistemas bipartites muito conhecido é a *concorrência*, que foi introduzido por Hill e Wootters para estados puros[19]. Diferentemente da entropia de von Neumann, a concorrência pode ser usada para mensurar emaranhamento em sistemas bipartites puros ou mistos, sendo que para cada caso há uma forma específica para o seu cálculo.

**Definição 4.3.1 (Concorrência Para Estados Bipartite Puros).** *Seja um estado bipartite puro, composto pelos subsistemas  $A$  e  $B$ , dado por  $|\psi\rangle$  e seu operador densidade*

$\hat{\rho}$ . A concorrência para o estado  $|\psi\rangle$  será definida como

$$C(|\psi\rangle) = \sqrt{2 - 2\text{Tr}[(\hat{\rho}^i)^2]}. \quad (4.14)$$

onde  $\hat{\rho}^i$ , com  $i = A$  ou  $B$ , é o operador densidade reduzido do sistema.

Para explicar a relação (4.14), vamos retomar o que foi mostrado na Seção 3.3.1 sobre operadores densidade reduzidos. Se o operador densidade reduzido  $\hat{\rho}^i$  for idempotente, ele compreende um estado não emaranhado e o cálculo do seu traço será igual a 1. Sendo assim, na relação (4.14) teremos  $C(|\psi\rangle) = 0$ , comprovando a separabilidade de  $|\psi\rangle$ .

Quando se trata de estados bipartite mistos, a concorrência é definida através de operações com o conjunto das raízes convexas<sup>2</sup> da matriz gerada a partir de  $\hat{\rho}$ , como veremos a seguir. A popularidade deste quantificador para sistemas bipartites mistos decorre do fato de que as raízes convexas podem ser facilmente calculadas para esse tipo de sistema [18].

**Definição 4.3.2 (Concorrência Para Estados Bipartite Mistos).** *Seja um estado bipartite misto representado pelo operador densidade  $\hat{\rho}$ . A concorrência para esse estado será calculada por*

$$C(\hat{\rho}) = \max \{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (4.15)$$

onde os  $\lambda_i^s$  são os autovalores em ordem decrescente do operador hermitiano  $R$ , que é definido como

$$R = \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}}\hat{\rho}\sqrt{\hat{\rho}}}, \quad (4.16)$$

ou as raízes quadradas dos autovalores do operador não hermitiano  $\tilde{\hat{\rho}}$ . O operador  $\tilde{\hat{\rho}}$  é definido como:

$$\tilde{\hat{\rho}} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \hat{\rho}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (4.17)$$

sendo  $\hat{\rho}^*$  o complexo conjugado e  $\sigma_y$  é a matriz de Pauli  $\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ .

O operador  $\tilde{\hat{\rho}}$ , que normalmente é chamado de *spin-flip*<sup>3</sup>, corresponde a aplicação de uma mudança de eixo em  $\hat{\rho}$  através das operações com a matriz da Pauli,

<sup>2</sup> Geometricamente, no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , um conjunto de raízes de um operador é um conjunto de pontos no plano complexo de  $\mathcal{H}$ . Seja  $R$  um conjunto de raízes de um operador  $P$ . Esse conjunto  $R$  é dito convexo quando ele está completamente contido no conjunto representado por  $P$ .

<sup>3</sup> O termo inglês *spin-flip* já sugere a noção de transformação, pois a sua tradução seria “mover bruscamente o spin”.

utilizando a relação (4.17). Sendo assim, a concorrência para estados mistos está diretamente ligada à semelhança entre o estado que queremos quantificar  $\hat{\rho}$  e o seu *spin-flip*  $\tilde{\hat{\rho}}$ , isto é, a fidelidade entre esses dois estados. Relembrando a definição que foi vista no final da Subseção 3.3.6, a fidelidade entre  $\hat{\rho}$  e o seu *spin-flip*  $\tilde{\hat{\rho}}$  é interpretada como a probabilidade de termos  $\tilde{\hat{\rho}}$  em  $\hat{\rho}$  após uma medição, isto é, o quanto eles se superpõem. A concorrência é um bom quantificador de emaranhamento e, assim como a entropia de von Neumann, para estados separáveis ela será nula e para os maximamente emaranhados a unidade.

## 4.4 Negatividade

Outra maneira de quantificar o emaranhamento, e que é bastante conhecido, é a *negatividade*, que foi proposta por Vidal e Werner [21]. Este quantificador utiliza operações com os autovalores negativos obtidos pela operação de transposição parcial aplicada ao operador densidade do sistema analisado. Conforme foi visto na Seção 3.3.3, pelo critério de Peres, dado um operador densidade  $\hat{\rho}$  que representa um sistema composto, se ao aplicarmos a operação de transposição parcial em um dos seus subsistemas obtivermos outro operador negativo, teremos que  $\hat{\rho}$  é necessariamente emaranhado. Pela Seção 3.3.4, através do Teorema 3.3.4, teorema Horodecki, se  $\hat{\rho}$  representa um sistema de dimensões  $2 \otimes 2$  ou  $2 \otimes 3$ , então a positividade da sua transposta parcial é um critério necessário e suficiente, sendo possível afirmar que este não possui emaranhamento. Portanto, a medida de emaranhamento através da negatividade é dada pela violação do critério PPT.

**Definição 4.4.1 (Negatividade).** *Seja um estado representado pelo operador densidade  $\hat{\rho}$ . A negatividade para esse estado será calculada por*

$$N(\hat{\rho}) = \frac{\|\hat{\rho}^{T^i}\| - 1}{2}, \quad (4.18)$$

onde  $\hat{\rho}^{T^i}$ , com  $i = A$  ou  $B$ , é a transposta parcial do sistema e  $\|\hat{\rho}^{T^i}\|$  representa a soma dos módulos dos autovalores de  $\hat{\rho}^{T^i}$ , ou seja, a sua norma do traço, dada por

$$\|\hat{\rho}^{T^i}\| = \mathbf{Tr} \left[ \sqrt{(\hat{\rho}^{T^i})^\dagger \hat{\rho}^{T^i}} \right]. \quad (4.19)$$

Podemos interpretar a relação (4.18) como o valor absoluto da soma dos autovalores negativos de  $\|\hat{\rho}^{T^i}\|$ , ou seja, ela nos define o quanto  $\|\hat{\rho}^{T^i}\|$  falha em ser positivo semi-definido [16].

Conforme Daniel Cavalcanti Santos [16], para sistemas bipartites, pela relação (4.18), a negatividade se define no intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$ . Por isso, muitas vezes a negatividade para sistemas bipartites  $N_B(\hat{\rho})$  é definida como sendo o dobro de (4.18), então

$$\begin{aligned} N_B(\hat{\rho}) &= 2N(\hat{\rho}) \\ &= \|\hat{\rho}^{T^i}\| - 1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Com isso, define-se a negatividade máxima dos estados bipartite maximamente emaranhados como sendo a unidade. Dessa forma, a negatividade, assim como a entropia de von Neumann e a concorrência, se define no intervalo  $[0, 1]$ .

Como vimos, o cálculo da negatividade se define a partir do valor absoluto ou módulo dos autovalores da transposta parcial do operador densidade do sistema analisado. Por isso, devido a sua construção, a negatividade falha para reconhecer emaranhamento em sistemas que obedecem ao critério PPT, isto é, sistemas cuja transposta parcial do operador densidade é positiva e semi-definida [18].

Em resumo, a negatividade pode ser utilizada para quantificar emaranhamento em sistemas puros ou mistos, sendo esses bipartite ou não, pois para o seu cálculo basta aplicarmos a operação de transposição parcial no operador densidade do estado que queremos analisar, calcularmos os autovalores desse operador negativo encontrado e aplicarmos a relação (4.18) ou (4.20). Devido a facilidade do seu cálculo e a sua funcionalidade, pois ele pode ser utilizado em sistemas bipartites de qualquer dimensão, a negatividade se tornou um quantificador muito utilizado para mensurar emaranhamento dos estados.

## 4.5 Explorando os quantificadores

Assim como foi apresentado ao final do Capítulo 3, nesta seção mostraremos alguns exemplos de aplicação dos quantificadores de emaranhamento vistos neste capítulo. Para tanto, utilizaremos estados já conhecidos como genuinamente emaranhados, como os estados de Bell, com o intuito de apenas demonstrarmos como essas medidas são efetuadas.

Inicialmente vamos calcular o grau de emaranhamento através da entropia de von Neumann. Considere o estado de Bell  $\Gamma_+$ , que já vimos na Seção 3.4 de exemplos, este é dado por

$$\Gamma_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), \quad (4.21)$$

o seu operador densidade, que já calculamos na Seção 3.4, será

$$\hat{\rho}_{\Gamma_+} = \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \quad (4.22)$$

e seus operadores densidade reduzidos  $\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A$  e  $\hat{\rho}_{\Gamma_+}^B$ , também já calculados nesta seção, serão

$$\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \quad (4.23)$$

$$\hat{\rho}_{\Gamma_+}^B = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|). \quad (4.24)$$

cujos autovalores são  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ . Utilizando a relação (4.5), vamos calcular a entropia de von Neumann para  $\Gamma_+$ :

$$\begin{aligned} S[\hat{\rho}^A] &= - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \log \lambda_i \\ &= -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (\log 2 + \log 2) \\ &= \frac{1}{2} (2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Então, de acordo com o resultado acima, conforme o que vimos na relação (4.13), a medida de emaranhamento de  $E[\Gamma_+] \in [0, 1]$ , pois  $E[\Gamma_+] = S[\hat{\rho}^A] = 1$ . Como a dimensão de  $|\Gamma_+\rangle$  é  $d = 2$ , então teremos que  $E[\Gamma_+] = \log 2 = 1$ , o que demonstra que o estado de Bell  $|\Gamma_+\rangle$  é maximamente emaranhado.

Agora calcularemos o valor do emaranhamento para o mesmo estado  $|\Gamma_+\rangle$  através da concorrência. Como se trata de um estado puro, vamos utilizar a relação (4.14) para encontrar a medida da concorrência para esse estado, sendo assim, como na Seção 3.4 já calculamos o traço do operador densidade reduzido desse estado,  $\mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A]^2 = \frac{1}{2}$ , vamos ao cálculo da concorrência:

$$\begin{aligned} C(|\Gamma_+\rangle) &= \sqrt{2 - 2\mathbf{Tr} [(\hat{\rho}_{\Gamma_+}^A)^2]} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Que revela o máximo emaranhamento do estado  $|\Gamma_+\rangle$ , conforme foi visto na Seção 4.3.

Finalmente, utilizaremos a negatividade para calcular o nível de emaranhamento do estado  $|\Gamma_+\rangle$ . Na Seção 3.4, onde aplicamos o critério PPT a esse estado, vimos

que os autovalores da sua transposta parcial  $\hat{\rho}_{\Gamma_+}^{TA}$  são dados por  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ . Primeiro vamos calcular a norma do traço do operador  $\hat{\rho}_{\Gamma_+}^{TA}$ , logo:

$$\begin{aligned}\|\hat{\rho}_{\Gamma_+}^{TA}\| &= \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| \\ &= 2.\end{aligned}$$

Como se trata de um sistema bipartite, vamos calcular a sua negatividade através da relação (4.20):

$$\begin{aligned}N_B(\hat{\rho}_{\Gamma_+}) &= \|\hat{\rho}_{\Gamma_+}^{TA}\| - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Esse resultado de negatividade máxima, conforme vimos na Seção 4.4, comprova que o estado  $|\Gamma_+\rangle$  representa um estado bipartite puro maximamente emaranhado.

No decorrer deste capítulo, apresentamos três dos quantificadores de emaranhamento que são bastante discutidas na literatura atual. Como vimos, através dessas ferramentas matemáticas podemos obter o quanto de emaranhamento o sistema analisado carrega. Descobrir o quanto de emaranhamento um sistema contém é essencial para decidirmos como isso poderá ser empregado. No entanto, esse não é o objetivo desta monografia, para uma compreensão intrudutória sobre como é aplicado o emaranhamento, sugerimos a leitura do Capítulo 11 da referência [17] ou do Capítulo 20 da referência [33].



## 5 Considerações Finais

As ideias iniciais sobre emaranhamento quântico surgiram a partir dos questionamentos derivados do paradoxo EPR. Decorridos desse contexto, vários físicos como Bohr, Schrödinger (que foi o primeiro a empregar o termo emaranhamento para os sistemas quânticos correlacionados), Bohm e Bell defenderam várias explicações para esclarecer essas particularidades de certos sistemas da Mecânica Quântica advindas do emaranhamento quântico, como suas correlações quânticas. Desde então, com o desenvolvimento das pesquisas sobre o emaranhamento quântico, descobriu-se que esse fenômeno poderia ser aplicado em vários ramos de estudo, indo de áreas da Física, como a Física Estatística e a Óptica Quântica, chegando ao campo da Teoria da Informação Quântica.

Sobre o emaranhamento quântico, podemos destacar três propriedades principais: é inerente aos sistemas compostos, já que sua ocorrência só é possível em sistemas com duas ou mais partes; a não-localidade, pois nos sistemas onde existem correlações quânticas seus subsistemas possuem influência mútua mesmo separados a longas distâncias; e a não-separabilidade, já que sistemas emaranhados perdem a individualidade de seus subsistemas, além dessa propriedade também poder ser vista como uma consequência direta da não-localidade, visto que sistemas emaranhados não podem ser descritos pelo produto tensorial de seus subsistemas.

Neste trabalho, onde demos ênfase aos estudos de sistemas com emaranhamento bipartite, podemos destacar como principal diferença entre os estados não-emaranhados puros e mistos a fatorabilidade e a separabilidade. Somente os sistemas puros não-emaranhados, onde não existem correlações quânticas ou clássicas, podem ser chamados de sistemas quânticos fatoráveis, pois eles se caracterizam por serem totalmente descorrelacionados. Já nos sistemas quânticos mistos não-emaranhados, que são representados por misturas estatísticas, há as correlações clássicas, por isso eles podem ser chamados de sistemas quânticos separáveis. Essa característica intrínseca aos sistemas puros, de não possuírem correlações, que possibilitou avanços maiores no estudo do emaranhamento nesse tipo de sistema se compararmos aos sistemas mistos.

Analisando os chamados qualificadores ou critérios de emaranhamento, que foram apresentados na Seção 3.3, quando falamos das operações matemáticas utilizadas que esses utilizam, eles podem ser divididos em dois grupos: os que utilizam operadores na identificação do emaranhamento, como é o caso do operador densidade reduzido, da testemunha de emaranhamento e do critério Horodecki, e os que utilizam critérios de permutação, como os critérios PPT e CCNR, onde são utilizadas permutações de alguns índices do operador densidade através do cálculo da transposta parcial ou do realinhamento desse operador densidade. Também podemos destacar a importância representada pela decomposição de Schmidt na identificação do emaranhamento, pois este critério, que é decisivo para determinar a pureza de um estado quântico, como vimos no decorrer deste trabalho, possui uma relação direta com o critério de operador densidade reduzido, além de poder ser utilizado para o cálculo do valor crítico  $\alpha$  da testemunha de emaranhamento de estados puros.

A principal necessidade de utilizar os quantificadores de emaranhamento está em conhecermos, de acordo com o nível de emaranhamento mensurado, como este poderá ser empregado. Genericamente, uma medida de emaranhamento pode ser considerada como uma condição de separabilidade, pois para o menor valor que ela pode assumir, zero, implicando que não existem correlações quânticas no sistema e que este pode ser representado como um estado produto. Uma característica comum aos quantificadores de emaranhamento vistos no Capítulo 4 é que os valores de emaranhamento medidos estão no intervalo  $[0, 1]$ , onde o valor 1 representa os estados maximamente emaranhados, como, por exemplo, os estados de Bell.

Outra particularidade desses quantificadores, também relativa aos estados puros bipartite, é o fato de todos trabalharem com operações nos subsistemas do estado analisado (operador densidade reduzido ou transposta parcial) para medir o grau de emaranhamento do sistema. Isso é interessante porque uma medida realizada pelos quantificadores pode ser interpretada como o quanto os subsistemas do estado analisado falham em serem puros, pois sendo o subsistema puro, a operação sobre esse subsistemas resultará em um valor típico para sistemas desse tipo (sendo 1, tanto para o traço como para o autovalor). Consequentemente, a medida de emaranhamento será nula, comprovando a separabilidade do sistema e a não existência de correlações de qualquer natureza.

De um modo geral, pudemos perceber que tanto os qualificadores quanto os quantificadores de emaranhamento são ferramentas que procuram aspectos em que o sis-

tema analisado falha em ser puro. Nesse contexto, puro é empregado no sentido de conservação das características intrínsecas aos sistemas quânticos de serem hermitiano ( $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ ), positivo (semi-definido) ( $\hat{\rho} \geq 0$ ) e de traço unitário ( $\mathbf{Tr} [\hat{\rho}] = 1$ ).

Por fim, embora seja uma teoria bastante nova, a teoria do emaranhamento tem sido útil para a compreensão de diversos fenômenos físicos. Atualmente, existem várias linhas de pesquisa que relacionam o emaranhamento com ramos da Física como, por exemplo, Física do Estado Sólido, Física Molecular, Física Nuclear e Astrofísica [16]. Também, em Teoria Quântica de Campos, já existem muitas pesquisas que relacionam o emaranhamento quântico com a oscilação de família dos neutrinos em sua propagação através do espaço. Contudo, como mencionado anteriormente, todos os temas estudados nesta monografia são ramificações do mesmo objetivo: entender a mais notável característica da Mecânica Quântica, o Emaranhamento Quântico.

# A Pré–requisitos ao Emaranhamento

## A.1 O vetor de estado

Em Mecânica Quântica não convém adotarmos a ideia de mensurar valores, como ocorre no estudo clássico dos sistemas. Em geral, só é possível prever a probabilidade de um resultado ao observarmos o seu comportamento, ou seja, por meio das suas quantidades observáveis. Desta forma, a definição do estado de um sistema físico quântico é representado por um vetor em um espaço vetorial complexo, o espaço de fases ou Hilbert ( $\mathcal{H}$ ), que, geometricamente, é interpretado como um conjunto conexo, que fornece o máximo de informações a respeito deste sistema.

Diferentemente do que ocorre na física clássica, na Mecânica Quântica os sistemas, os vetores no espaço de Hilbert, são representados pela *notação de Dirac*. Temos duas nomenclaturas: a chamada *ket*, *nome do vetor*, um vetor coluna que se caracteriza por ser composto por números complexos

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

e o seu complementar, o vetor linha *bra*, *nome do vetor*, que também é composto por números complexos

$$\langle\psi| = \left( \psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \dots \quad \psi_n^* \right). \quad (\text{A.2})$$

O produto interno, também chamado de *colchete de Dirac*, é dado por

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left( \psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \dots \quad \psi_n^* \right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = a \quad (\text{A.3})$$

onde  $a$  é um número complexo. Quando o produto interno é hermitiano

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle^* = a, \quad (\text{A.4})$$

onde o  $*$  representa o complexo conjugado dos elementos dos vetores,  $a$  é um número real puro.

Já o produto externo será

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \cdots & \psi_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1\psi_1^* & \psi_1\psi_2^* & \cdots & \psi_1\psi_n^* \\ \psi_2\psi_1^* & \psi_2\psi_2^* & \cdots & \psi_2\psi_n^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n\psi_1^* & \psi_n\psi_2^* & \cdots & \psi_n\psi_n^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

onde o resultado é uma matriz  $n \times n$ .

Seja  $|\psi\rangle$  um vetor de estado que pertence ao espaço de fases de  $\mathcal{H}$ . Os vetores  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_i\rangle$  compõem um subespaço de  $|\psi\rangle$ . Utilizando o princípio da superposição, podemos representar  $|\psi\rangle$  através da combinação linear dos vetores que o compõem:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle \quad (\text{A.6})$$

onde  $a_i$ , um número complexo, que representam os coeficientes de expansão de cada estado.

Quando um estado quântico pode ser representado através do seu vetor de estado, ele é chamado de *estado puro*. Consideremos o estado puro  $|\psi\rangle$ , com  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  sendo seus dois possíveis subestados. Utilizando o princípio da superposição,  $|\psi\rangle$  pode ser representado por

$$|\psi\rangle = c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle, \quad (\text{A.7})$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são números complexos conhecidos e o seu estado complementar será

$$\langle\psi| = c_1^* \langle\psi_1| + c_2^* \langle\psi_2|, \quad (\text{A.8})$$

com  $c_1^*$  e  $c_2^*$  sendo os complexos conjugados de  $c_1$  e  $c_2$ .

Quando  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  são ortonormais, temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= (c_1^* \langle\psi_1| + c_2^* \langle\psi_2|) (c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle) \\ &= c_1^* c_1 \langle\psi_1|\psi_1\rangle + c_1^* c_2 \langle\psi_1|\psi_2\rangle + c_2^* c_1 \langle\psi_2|\psi_1\rangle + c_2^* c_2 \langle\psi_2|\psi_2\rangle \\ &= c_1^2 + c_2^2 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

sendo  $c_1^2$  e  $c_2^2$  valores reais.

A definição de um estado  $|\psi\rangle$  deve abranger o subespaço vetorial que ele gera dentro do espaço de fases de  $\mathcal{H}$ , logo, podemos descrevê-lo através do seu projetor  $\Lambda_\psi$

$$\Lambda_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (\text{A.10})$$

Podemos definir uma base vetorial em Mecânica Quântica como sendo o conjunto de todos os vetores de estado linearmente independentes que compõem o espaço de fases de  $\mathcal{H}$ . Quanto a base  $\{|n\rangle\}$  é ortogonal, o resultado do produto interno entre os vetores do espaço de  $\mathcal{H}$  é definido pelo Delta de Kronecher:

$$\langle\psi_{\nu_1}|\psi_{\nu_2}\rangle = \delta_{\nu_1,\nu_2} \begin{cases} 0, & \nu_1 \neq \nu_2 \\ 1, & \nu_1 = \nu_1 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

As variáveis dinâmicas ou observáveis na Mecânica Quântica são representados por operadores no espaço de fases  $\mathcal{H}$ , por exemplo: operador momento  $\hat{\mathbf{p}} = \hat{p}_j$ , operador posição  $\hat{\mathbf{q}} = \hat{q}_j$ , operador spin  $\hat{\mathbf{s}} = \hat{s}_j$ , operador hamiltoniano  $\hat{H}$ , onde  $j = 1, 2, 3$  são as coordenadas. Quando dois operadores comutam,  $[A, B] = 0$ , dizemos que essas variáveis dinâmicas são compatíveis, o que implica que esses operadores possuem um conjunto completo de autovalores em comum. A relações de comutação mais usuais na Mecânica Quântica são:

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{j,k} \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

e

$$[\hat{s}_j, \hat{s}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{s}_l \begin{cases} 1, & l, j, k \\ -1, & l, k, j \\ 0, & l = j \text{ ou } l = k \text{ ou } j = k \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Na primeira relação, definida pelo Delta de Kronecker, os operadores posição e momento somente comutam se não pertencerem a mesma coordenada. Enquanto que, na segunda relação, definida pelo símbolo de *Levi-Cevita*, a não-comutação entre os spins será positiva para permutações cíclicas das coordenadas,  $l \rightarrow j \rightarrow k$ , e negativa para permutações não-cíclicas destas,  $l \rightarrow k \rightarrow j$ , e só haverá comutação entre os operadores para coordenadas iguais.

Chamamos de autovalores os possíveis valores que os operadores podem assumir quando eles agem sobre o vetor de estado ou autovetor. Por exemplo, quando os operadores abaixo agem nos vetores de estado, teremos:

$$\hat{\mathbf{p}}|\phi\rangle = p|\phi\rangle; \quad \hat{\mathbf{q}}|\alpha\rangle = r|\alpha\rangle; \quad \hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \quad (\text{A.14})$$

Seja o mesmo conjunto de vetores  $|\psi\rangle$  de um operador  $\hat{X}$ . Podemos escrever o seu valor médio  $\langle\hat{X}\rangle_\psi$  em um estado qualquer desse espaço vetorial ou o valor esperado do operador  $\hat{X}$  em relação ao estado  $|\psi\rangle$  como:

$$\begin{aligned} \langle\hat{X}\rangle_\psi &= \langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle \\ &= \sum_i x_i \langle x_i|\psi\rangle \langle\psi|x_i\rangle \\ &= \sum_i x_i |\langle x_i|\psi\rangle|^2 \\ &= \sum_i x_i p_i(\psi, x_i) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde  $p_i(x_i) = |\langle x_i|\psi\rangle|^2$  é a probabilidade de medirmos o valor  $x_i$  quando o operador  $\hat{X}$  age em  $|\psi\rangle$ .

## A.2 O operador densidade

Conforme mencionado no início da seção, os estados quânticos fornecem o máximo de informações a respeito de um sistema. Por meio deles, obtemos as propriedades do sistema, sua evolução temporal, além de possíveis resultados de medições que queiramos efetuar. Todos os sistemas que não podem ser representados somente por vetores de estados são chamados de *estados mistos*. Um estado misto ou não-puro pode ser definido como um estado onde não podemos descrever o máximo de informações a seu respeito, portanto, para esses sistemas, nós não podemos definir em que estado exatamente ele está e nem descrevê-lo através da superposição do produto de estados. Nesse caso, a informação que temos é a probabilidade com que ele pode estar em um estado qualquer  $|\psi_j\rangle$  através do operador densidade  $\hat{\rho}$ . Dessa forma,  $\hat{\rho}$  será definido como:

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j| \quad (\text{A.16})$$

que representa a somatória de todos os estados possíveis associadas a probabilidade  $p_j$  do sistema está no  $j$ -ésimo estado  $|\psi_j\rangle$ . Podemos dizer que o operador  $\hat{\rho}$  descreve a estatística dos resultados de qualquer teste quântico ou a mistura estatística dos estados.

Assim como em estatística, a medida de probabilidade na Mecânica Quântica obedece as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq p_j \leq 1; \\ \sum_j p_j = 1; \\ \sum_j p_j^2 \leq 1. \end{array} \right. \quad (\text{A.17})$$

Podemos representar um estado puro  $|\psi_j\rangle$  através do operador densidade  $\hat{\rho}$ . Como para esse estado temos certeza que o seu vetor de estado o representa completamente, a probabilidade será 1 e  $\hat{\rho}$  para esse estado será:

$$\hat{\rho} = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad (\text{A.18})$$

que representa o projetor do estado  $|\psi_j\rangle$ . Podemos concluir que o operador densidade pode ser generalizado como a somatória do produto do operador de projeção de cada vetor do conjunto de estados com a probabilidade de se ter cada estado.

Ainda para um estado puro  $|\psi_j\rangle$ , teremos as seguintes relações para  $\hat{\rho}$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^2 &= \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} \\ &= |\psi_j\rangle\langle\psi_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j| \\ &= |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \\ &= \hat{\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^\dagger &= |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \\ &= \hat{\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

sendo que em (A.19) temos a propriedade da idempotência e na (A.20) a propriedade hermitiana. A propriedade (A.20) é válida tanto para estados puros como para os mistos, pois as probabilidades são valores reais. Seja o operador descrito em (A.16), aplicando a propriedade de hermiticidade, teremos:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^\dagger &= \left( \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \right)^\dagger \\ &= \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \\ &= \hat{\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$



Podemos definir a matriz densidade como sendo a representação do operador densidade  $\hat{\rho} = \sum_j |\psi_j\rangle p_j \langle \psi_j|$  numa base ortonormal qualquer  $\{|n_k\rangle\}$ , isto é, os elementos da matriz de  $\hat{\rho}$  nessa base são dados por:

$$\begin{aligned} \langle n_k | \hat{\rho} | n_{k'} \rangle &= \sum_j \langle n_k | \psi_j \rangle p_j \langle \psi_j | n_{k'} \rangle \\ &= \sum_j p_j c_k^{(j)} c_{k'}^{(j)}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Em álgebra matricial, o traço de uma matriz é representado pela soma dos elementos da diagonal principal dessa matriz. Vamos calcular o traço de  $\langle n_k | \hat{\rho} | n_{k'} \rangle$ .

$$\begin{aligned} Tr [\hat{\rho}] &= \sum_k \langle n_k | \hat{\rho} | n_{k'} \rangle \\ &= \sum_k \sum_j \langle n_k | \psi_j \rangle p_j \langle \psi_j | n_{k'} \rangle \\ &= \sum_k \sum_j p_j \langle n_k | \psi_j \rangle \langle \psi_j | n_{k'} \rangle \\ &= \sum_k \sum_j p_j |\langle n_k | \psi_j \rangle|^2 \\ &= \sum_k \sum_j p_j |\delta_{kj}|^2 \\ &= \sum_j p_j \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Sempre que  $\hat{\rho}$  for hermitiano, os elementos da sua diagonal principal serão números reais, logo:

$$0 \leq \langle n_k | \hat{\rho} | n_{k'} \rangle \leq 1. \quad (\text{A.24})$$

De acordo com as considerações acima, um estado que é representado por um operador densidade  $\hat{\rho}$  se define como um estado quântico se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger; \\ \hat{\rho} \geq 0; \\ Tr [\hat{\rho}] = 1. \end{array} \right. \quad (\text{A.25})$$

Vamos calcular o traço de  $\hat{\rho}^2$  e verificar as propriedades que ele representa.

$$\begin{aligned} Tr [\hat{\rho}^2] &= \sum_k \langle n_k | \hat{\rho}^2 | n_k \rangle \\ &= \sum_k \sum_i \sum_j p_i p_j \langle n_k | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | n_k \rangle \\ &= \sum_i \sum_j p_i p_j |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr [\hat{\rho}^2] &= \sum_i \sum_j p_i p_j |\delta_{ij}|^2 \\
&\leq \left[ \sum_i p_i \right]^2 \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

onde teremos:

$$Tr [\hat{\rho}^2] \begin{cases} = 1, & \text{para estados puros} \\ < 1, & \text{para estados mistos} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Seja um operador qualquer  $\hat{O}$  e o vetor de um conjunto de estados puros  $|\psi_i\rangle$ , o valor esperado deste operador, seu valor médio, como vimos anteriormente, é dado por:

$$\langle \hat{O} \rangle_{i.} = \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle. \quad (\text{A.27})$$

E para um estado misto teremos a média ponderada:

$$\langle \hat{O} \rangle_{i.} = \sum_j p_j \langle \psi_j | \hat{O} | \psi_j \rangle. \quad (\text{A.28})$$

Generalizando a relação acima:

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr[\hat{\rho}\hat{O}]. \quad (\text{A.29})$$

De acordo com as relações feitas acima, podemos dizer que o valor esperado de um operador qualquer em um sistema quântico descrito por um operador densidade  $\hat{\rho}$  é o traço do produto desse operador por  $\hat{\rho}$ .

### A.3 Transformações unitárias

O operador  $U$ , chamado de operador unitário, é representado por uma matriz unitária e ortogonal, onde suas colunas e linhas correspondem a vetores ortonormais. Matematicamente, um operador unitário é definido da seguinte forma:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \hat{\mathbf{1}}. \quad (\text{A.30})$$

Quando o operador unitário age sobre o operador densidade de um sistema, ele não modifica os autovalores desse operador, quer dizer, os autovalores desse operador são invariantes mediante transformações unitárias locais. Vejamos a seguir uma transformação unitária local.

Seja o operador densidade dado por  $\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B$ , sendo  $U^A$  e  $U^B$  operações unitárias aplicadas sob os subsistemas  $A$  e  $B$ , teremos que:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}' &= (U^A \otimes U^B) \hat{\rho} (U^A \otimes U^B)^\dagger \\ &= (U^A \otimes U^B) \left( \sum_i p_i \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B \right) (U^A \otimes U^B)^\dagger \\ &= \sum_i p_i (U^A \hat{\rho}_i^A (U^A)^\dagger) \otimes (U^B \hat{\rho}_i^B (U^B)^\dagger).\end{aligned}$$

Aplicando uma operação de transposição sobre o subsistema  $A$ , teremos:

$$\begin{aligned}(\hat{\rho}')^{TA} &= \sum_i p_i (U^A \hat{\rho}_i^A (U^A)^\dagger)^T \otimes (U^B \hat{\rho}_i^B (U^B)^\dagger) \\ &= \sum_i p_i ((U^A)^\dagger)^T (\hat{\rho}_i^A)^T (U^A)^T \otimes (U^B \hat{\rho}_i^B (U^B)^\dagger)\end{aligned}$$

sendo  $(U^A)^\dagger = ((U^A)^T)^*$ , pois o adjunto equivale a operação de transposição em conjunto com o complexo conjugado dos elementos de  $U$ , então teremos:

$$\begin{aligned}(\hat{\rho}')^{TA} &= \sum_i p_i (((U^A)^T)^*)^T (\hat{\rho}_i^A)^T ((U^A)^*)^\dagger \otimes (U^B \hat{\rho}_i^B (U^B)^\dagger) \\ &= \sum_i p_i (U^A)^* (\hat{\rho}_i^A)^T ((U^A)^*)^\dagger \otimes (U^B \hat{\rho}_i^B (U^B)^\dagger) \\ &= \left( (U^A)^* \otimes ((U^A)^*)^\dagger \right) \sum_i p_i (\hat{\rho}_i^A)^T \otimes (U^B \hat{\rho}_i^B (U^B)^\dagger) \\ &= ((U^A)^* \otimes U^B) \hat{\rho}^{TA} ((U^A)^* \otimes U^B)^\dagger.\end{aligned}$$

Fazendo  $(U^A)^* = \bar{U}^A$ , teremos:

$$(\hat{\rho}')^{TA} = (\bar{U}^A \otimes U^B) \hat{\rho}^{TA} (\bar{U}^A \otimes U^B)^\dagger. \quad (\text{A.31})$$

Como vimos, quando  $\hat{\rho}$  sofre uma transformação unitária local, então a sua transposta parcial  $\hat{\rho}^{TA}$  também sofrerá. No entanto, seus autovalores permaneceram invariantes. Isso ocorre porque, embora a matriz  $\hat{\rho}^{TA}$  dependa das bases escolhidas para a sua construção, os seus autovalores não.

## B Estados gaussianos bipartites

Um estado quântico que é representado por uma função característica gaussiana, portanto definido por variáveis contínuas, é chamado de *estado gaussiano*. A vantagem no estudo desses estados é que eles possuem uma formulação matemática relativamente simples, o que permite cálculos explícitos, e também esses estados são relativamente acessíveis experimentalmente. Um exemplo de estado gaussiano de um sistema simples é a representação de um oscilador harmônico unidimensional:

$$\Psi(x) = Ae^{-\frac{|x|^2}{2}}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $A$  é o fator de normalização.

Para um estado gaussiano, a função característica gaussiana nos fornece todas as informações que qualificam esse sistema [31], portanto, ela nos fornece uma descrição completa a respeito desse estado. A função característica gaussiana representa para o estado gaussiano o mesmo que o operador densidade para estados mistos e o vetor de estado para os estados puros.

Um exemplo típico de estados gaussianos em sistemas compostos bipartites, que pode ser visto em [32], é o apresentado abaixo:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Sd}} e^{k_1}, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{onde } k_1 = -\frac{(x_1-x_2)^2}{4S^2} - \frac{(x_1+x_2)^2}{16d^2}.$$

Para esse sistema, o seu operador densidade é dado por:

$$\begin{aligned} \rho_{\Psi}(x_1, x_2) &= [\Psi(x_1, x_2)]^2 \\ &= \frac{1}{2\pi Sd} e^{k_2}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{sendo } k_2 = -\frac{4d^2x_1^2 - 8d^2x_1x_2 + 4d^2x_2^2 + S^2x_1^2 + 2S^2x_1x_2 + S^2x_2^2}{8S^2d^2}.$$

Para a caracterização de emaranhamento em estados gaussianos bipartites, o critério mais utilizado é o critério PPT, pois este qualificador é considerado necessário e

suficientes para este tipo de estado. Outra forma de identificação de emaranhamentos em estados gaussianos bipartites, que também é considerado um critério necessário e suficiente, é o critério de separabilidade de Simon<sup>1</sup>. Este qualificador é uma generalização do critério PPT. Dentre os quantificadores de emaranhamento, o mais comum quando se trata de estados gaussianos é a negatividade, principalmente devido a sua facilidade de cálculo.

Embora não tenham tido uma abordagem aprofundada nesta monografia, os estados gaussianos são sistemas quânticos muito explorados quando se trata do estudo de comunicação quântica. Em Teoria da Informação Quântica, os estados gaussianos possuem um importância central nos estudos do processamento de informações dessa natureza<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Para compreender como este critério funciona consulte a referência [31] ou consulte o artigo original onde Simon apresentou este critério: SIMON, R. Phys. Rev. Lett. 84, 2726 (2000)

<sup>2</sup> Para um estudo mais aprofundado sobre estados gaussianos e emaranhamento consulte as referências [32] e [31] e a dissertação de Ph.D do Professor Gerardo Adesso, *Emaranhamento de Estados Gaussianos*.

## Referências Bibliográficas

- [1] SCHRÖDINGER, E. (1935) *Discussion of probability relations between separated systems*. Proc. Camb. Phil. 31: pp. 555, 1935.
- [2] COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALÖE, F. (1977) *Quantum mechanics*. Hermann and John Wiley & Sons, Paris, vol. 1. 1977.
- [3] ROBINSON, A. (2005) *Einstein: os 100 anos da teoria da relatividade*. Elsevier, Rio de Janeiro, 2005.
- [4] EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. (1935) *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Rev. 47: pp.777, 1935.
- [5] PESSOA JR, O. (2006) *Conceitos de Física Quântica*. Livraria da Física, São Paulo, Vol. II, 1ª Edição, 2006.
- [6] BOHR, N. (1935) *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Rev. 48: pp.696, 1935.
- [7] SCHRÖDINGER, E. (1936) *Probability relations between separated systems*. Proc. Camb. Phil. 32: pp. 446, 1936.
- [8] PORCELLI, E.B.; (2010) *Estudo do fenômeno de emaranhamento quântico em sistemas de duas partículas*. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo-SP, 2010.
- [9] BOHM, D. (1952) *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. I*. Phys. Rev. 85 (2): pp.166, 1952.
- [10] BOHM, D.; AHARONOV, Y. (1957) *Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*. Phys. Rev. 108 (4): pp.1070, 1957.

- [11] BELL, J.S. (1964) *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*. Physics (Long Island City, N.Y.) 1: pp.195, 1964.
- [12] PIZA, A.F.R.T.; (2009) *Sistemas quânticos compostos e emaranhamento, sistemas quânticos abertos e decoerência*. In: Segunda Escola de física teórica da Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, USP: Instituto de Física, 2009. 53p.
- [13] CLAUSER, J. F.; HORNE, M. A.; SHIMONY, A.; HOLT, R. A. (1969) *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*. Phys. Rev. Lett. 23 (15): pp.880, 1969.
- [14] BELL, J.S. (1971) *Introduction to the hidden variable question*. In: Proceedings of the International School of Physics 'Enrico Fermi', Course IL, Foundations of Quantum Mechanics, Varena. (Academic Press, N. Y.), 1971.
- [15] QUINTINO, M.T.C.; SANTOS, M.A. (2011) *Desigualdades de Bell: uma introdução à não-localidade quântica*. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/~tcunha/Bell-Mateus-MTulio.pdf>>. Acesso em: 26 de junho de 2012.
- [16] SANTOS, D.C.; (2006) *Em busca de um entendimento completo acerca do emaranhamento*. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte-MG, 2006.
- [17] GERRY, C.C.; KNIGHT, P.L. (2004) *Introductory quantum optics*. Cambridge University Press, NY, 2004.
- [18] GÜHNE, O.; TÓTH, G. (2009) *Entanglement detection*. Phys. Rep. 474: pp.1, 2009.
- [19] HORODECKI, R.; et. al. (2009) *Quantum entanglement*. Rev. of Mod. Phys. 81: pp.865, 2009.
- [20] CUNHA, M.O.T.; (2005) *Emaranhamento: caracterização, manipulação e consequências*. Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte-MG, 2005.
- [21] OLIVEIRA, J.L.; (2012) *Ferramentas algébricas para o estudo do entrelaçamento quântico*. Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal do Ceará. Fortaleza-CE, 2012.

- [22] AOLITA, M.L.; (2008) *A física do emaranhamento: produção, detecção e aplicações*. Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro-RJ, 2008.
- [23] HORODECKI, M.; HORODECKI, P.; HORODECKI, R. (1996) *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions*. Phys. Lett. A 223: pp.1, 1996.
- [24] RUDOLPH, O. (2000) *A Separability Criterion for Density Operators*. J. Phys. A 33: pp.3951, 2000.
- [25] CHEN, K.; WU, L.-A. (2003) *A matrix realignment method for recognizing entanglement*. Quantum Inf. Comput. 3: pp.193, 2003.
- [26] SCHNEIDERBAUER, L.; (2012) *Entanglement or separability: an introduction*. Monografia de Bacharelado apresentada à “Universität Wien”. Wien-AUT, 2012.
- [27] RUDOLPH, O. (2001) *A new class of entanglement measures*. J. Math. Phys. 42: pp.2507, 2001.
- [28] HORODECKI, P.; et. al. (2003) *Direct detection of quantum entanglement*. Quantum Inf. Comput. 4 (2): pp.111, 2003.
- [29] RUDOLPH, O. (2003) *Further results on the cross norm criterion for separability*. J. Phys. A 36: pp.5825, 2003.
- [30] TAVARES, A.H.M.P.; (2003) *Aspectos Matemáticos da Entropia*. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Aveiro. Aveiro-PT, 2003.
- [31] MONTEIRO, J.F.H.L.; (2010) *O estudo do emaranhamento na emissão espontânea no espaço livre e em uma cadeia de osciladores harmônicos acoplados*. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa-PR, 2010.
- [32] GHESQUIÈRE, A.; (2009) *Entanglement in a Bipartite Gaussian State*. Tese de Doutorado apresentada à “National University of Ireland”, Maynooth-IRL, 2009.
- [33] MEYSTRE, P.; SARGENT, M. III (2007) *Elements of quantum optics*. Springer, NY, 4<sup>a</sup> Edition, 2007.
- [34] ACKER, F.; DICKSTEINS, F. (1983) *Uma introdução à análise convexa*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro - RJ, 1983.



- 
- [35] SAKURAI, J.J. (1994) *Modern quantum mechanics*. Adisson-Wesley Publishing Company, Inc., 1994.