SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
FACULDADE DE FÍSICA

APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO CÍRCUITO R.L.C. EM SÉRIE.

PATRÍCIA DA SILVA GUIMARÃES

Marabá- Pa
Setembro 2016

PATRÍCIA DA SILVA GUIMARÃES

APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO CÍRCUITO R.L.C. EM SÉRIE.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof.Me. Jorge Everaldo de Oliveira

Marabá- Pa

Setembro 2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca II da UNIFESSPA. CAMAR, Marabá, PA

Guimarães, Patrícia da Silva
Aplicação das equações diferenciais no circuito R.L.C. em série / Patrícia da Silva Guimarães; orientador, Jorge Everaldo de Oliveira. — 2016.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Campus Universitário de Marabá, Instituto de Ciências Exatas, Faculdade de Física, Curso de Física, Marabá, 2016.

1. Equações diferenciais. 2. Circuitos elétricos. 3. Eletricidade. I. Oliveira, Jorge Everaldo de, orient. II. Título.

CDD: 22. ed.: 515.35

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
FACULDADE DE FÍSICA

PATRÍCIA DA SILVA GUIMARÃES

Data da defesa: 14 de Setembro de 2016. Conceito:_____

Banca Examinadora

_____

Prof. Me. Jorge Everaldo de Oliveira
Orientador

_____

Prof. Drª Maria Liduína das Chagas
Membro 1 – *Unifesspa*

_____

Prof. Fábio Barros de Sousa
Membro 2 – *Unifesspa*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por estar sempre presente em minha vida me mostrando que seus planos para minha vida são muitos maiores que meus próprios sonhos. Por senti-lo sempre ao meu lado nos momentos mais difíceis, dando-me saúde e segurança para não desanimar diante dos obstáculos encontrados pelo caminho.

Aos meus filhos Pablo, Enzo e Ester, que no decorrer destes anos contribuíram ajudando-me. Aos quais muito devo pelo tempo que deixei de dedicar- lhes, pela falta de atenção quando mais necessitavam da minha presença.

Ao meu esposo Everson Nicolau pelo apoio, amor, afeto, companheirismo e ajuda na educação dos meus filhos na minha ausência. Quem sempre me incentivou a lutar e a conquistar meus sonhos.

À minha mãe Teresinha Ferreira da Silva, e ao meu pai Aiala Ferreira Guimarães, meu irmão Romilto, e minha irmã Ueila, pessoas essas a quem eu devo minha eterna gratidão, que sem medir esforços sempre esteve ao meu lado durante toda minha caminhada, me amando incondicionalmente e me apoiando nas minhas escolhas. E a meu inesquecivel professor do ensino médio José Fábio Souza da Silva por incentivar o meu ingresso na vida acadêmica.

Ao meu querido professor mestre Jorge Everaldo de Oliveira por dedicar sua atenção a me acompanhar durante toda essa tragetória de conclusão de curso, aos professores do *IFPA* campus Marabá Eldon e Willi, pela colaboração dos equipamentos usados no experimento, aos professores Elizabeth Sabino e Fábio Barros pelo desenvolvimento das equações diferenciais, e por fim agradeço muito, muito mesmo ao técnico do laboratório de Física *(UNIFESSPA)* Caio Fernando por te compartilhado a mim todo seu conhecimento em relação ao assunto abordado, e a sua dedicação durante o todo o trabalho experimental.

Resumo

O estudo das equações diferenciais é uma evolução natural do cálculo que apresenta uma intrínseca relação da matemática pura com a aplicada, no entanto a sua relevância reside em suas aplicações.

A crescente evolução do conhecimento da maneira como os materiais reagem á eletricidade propocionaram ao homem a elaboração de complexos sistemas para a condução e transformação da energia elétrica ao qual denominamos circuito eletrico.

O circuito eletrico é um derteminado agrupamento de componetes elétricas (Resistores, Capacitores, Indutores, Geradores, etc.) rearranjados de forma a conduzir cargas eletricas para determinados fins.

O comportamento idealizado dos circuitos elétricos e de vital importância para o desenvolvimento de novas tecnologia e aplicações nas áreas da engenharia elétrica e eletrôtica.

Este trabalho tem por objetivo desenvolver aplicações diferenciais de segunda ordem para o circuito R.L.C. em série, circuito esse, que apresenta resistor, indutor, e capacitor. Para isso desenvolvemos ao longo do texto teorias e alguns exemplos para o entendimento do mesmo. Dessa forma, mostraremos todo o funcionamento do sistema do circuito R.L.C. em serie.

Palavras Chaves: Equações Diferenciais, Circuito R.L.C. em série.

Abstract

The study of differential equations is a natural evolution of calculation that has an intrinsic relation of pure mathematics to applied, however its relevance lies in its applications.

The growing evolution of knowledge of how the materials react to electricity provided to man the development of complex systems for driving and transforming power which we call electrical circuit.

The electrical circuit is a certain grouping of electrical components (resistors, capacitors, inductors, generators, etc.) rearranged in order to conduct electric charges for certain purposes.

The idealized behavior of electrical circuits and of vital importance to the development of new technologies and applications in the areas of electrical and electronic engineering.

This work aims to develop differential applications of second order for the circuit R.L.C. in series, this circuit, which has resistor, inductor and capacitor. To develop this theory throughout the text and examples for understanding the same. In this way, we will show the whole operation of the circuit system R.L.C. in series.

Key words: Differential Equations, Circuit R.L.C. in series.

SUMÁRIO

Introdução **7**

1 Conceitos Preliminares 9

1.1 Equação diferencial 9

1.2 Problema de Valor Inicial(PVI) 10

1.3 Problema de valor de contorno 12

2 Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem com Coefcientes Constantes **15**

2.1 Equação Linear Homogênea 15

2.2 Raízes Reais e Distintas 21

2.3 Raízes Reais e Iguais 22

2.4 Raízes Complexas 24

2.5 Equação linear não-homogênea 26

2.6 Método dos coeficientes a determinar 27

3 Aplicações de Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem **31**

3.1 Circuito R.L.C. (Resistor, Indutor, Capacitor) 31

3.2 Formulação Matemática 31

Bibliografia **37**

Anexo **38**

Introdução

As palavras diferencial e equações obviamente sugerem a resolução de algum tipo de equação envolvendo derivadas. Mas porque estudar este assunto? A resposta é simples: equações diferenciais são o suporte matemático para muitas áreas da ciência e da engenharia. Muitas das leis da natureza em Física, Química, Biologia e Astronomia, têm sua expressão mais natural na linguagem das equações diferenciais. Mesmo em Matemática são muitas suas aplicações em Geometria, Engenharia, Economia e muitos outros campo da Ciência. Elas se originaram no século XVII, a partir da tentativa de formular, ou descrever, certos sistemas físicos em termos matemáticos. Newton, Leibniz e os irmãos Bernoulli resolveram equações diferenciais oriundas da Geometria e Mecânica. Estes desenvolvimentos iniciais, que começaram na última década do século XVII, levaram à procura de técnicas de solução de certos casos específicos de equações diferenciais.

Todos os conceitos, fórmulas e aplicações matemáticas originaram-se de problemas reais, pois, era a partir de um questionamento ou uma situação de sua realidade que os estudiosos buscavam as soluções.

Procuramos colocar de maneira acessível os conceitos sobre equações diferenciais homogêneas e não-homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes em problemas físicos. No entanto, para que você possa acompanhar faz-se necessário no mínimo o conhecimento sobre Cálculo I, além de noções sobre Física para dar embasamento as aplicações. Mas, se você é um aluno autonômo, pode consultar livros sobre limite, derivada, integral, números complexos, equações diferenciais de 2ª ordem, etc.

Este trabalho é composto de 3 capítulos. O primeiro capítulo, trata de conceitos preliminares como: Equação diferencial, Equação diferencial ordinária,

classificação pela ordem e pela linearidade, problema de valor inicial e de contorno. O segundo, trata do princípio da superposição, dependência e i ndependência linear e o wronskiano e ainda sobre os conceitos mais específicos de equações diferenciais de 2ª ordem. O terceiro capítulo, trata exclusivamente de aplicações de EDO's de segunda ordem no circuito R.L.C. (Resistor, Indutor, Capacitor) .

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

1.1 Equação diferencial

Definição 1.1 *Uma equação envolvendo uma variável dependente e suas derivadas em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada equação diferencial (ED).*

Equações diferenciais são classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

1.1.1 Equação diferencial ordinária

Definição 1.2 *Uma equação que contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, é chamada equação diferencial ordinária (EDO).*

Vejamos abaixo alguns exemplos de equações diferenciais ordinárias,

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\,\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

1.1.2 Quanto à ordem

A ordem de uma equação diferencial é indicada pela maior ordem de derivação que aparece na equação.

Exemplo 1.1 *$xy' - y = 0$, é uma equação diferencial de 1ª ordem, pois a ordem da maior derivada da função incógnita $y = f(x)$ que aparece na equação é 1.*

Exemplo 1.2 *$y'' - 3t^2 = 0$, é uma equação diferencial de 2ª ordem, pois a ordem da maior derivada da função incógnita $y = f(t)$ que aparece na equação é 2.*

1.1.3 Quanto à linearidade

Uma equação diferencial é chamada de linear quando pode ser escrita na forma,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y \quad = \quad g(x).$$

Observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.

(ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

1.2 Problema de Valor Inicial(PVI)

Uma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} \quad = \quad f(x, y),$$

está sempre sujeita à condição inicial $y(x_0) = y_0$, em que x_0 é um número no intervalo I e y_0 é um número real arbitrário chamado de problema de valor inicial(PVI). Graficamente a solução de uma equação diferencial definida em algum intervalo I deve passar por um ponto (x_0, y_0) determinado anteriormente,

ou seja, em geral deseja-se saber, antes de considerar um problema de valor inicial, se uma solução existe e, quando existe, se é a única solução para o problema.

Para o caso de uma equação linear de segunda ordem, uma solução para o problema de valor inicial

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} \quad + \quad a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{1.1}$$

onde $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$, é uma função que satisfaça a equação diferencial em I, cuja Figura 1.1, passa pelo ponto (x_0, y_0) com inclinação igual a y'_0.

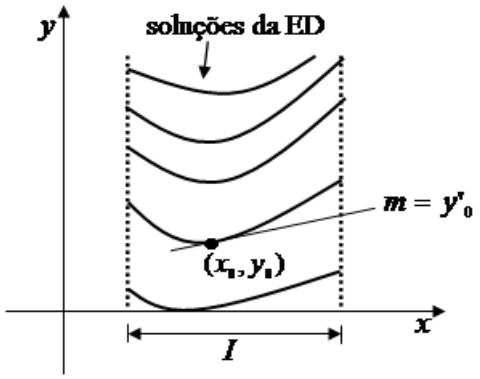

Figura 1.1: O gráfico representa a solução de uma Equação Diferencial sujeito ás condições iniciais.

Fonte: Figura retirada com adaptações da referência[1]

O Teorema da Existência de uma Única Solução nos fornece condições suficientes para a existência de uma única solução para o problema de valor inicial das equações diferenciais lineares.

Teorema 1.1 ***Existência de uma Única Solução***

Sejam $a_n(x), a_{n-1}(x), ..., a_1(x), a_0(x)$ *e* $g(x)$ *funções continuas em um intervalo* I *com* $a_n(x) \neq 0$ *para todo* x *neste intervalo. Se* $x = x_0$ *é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução* $y(x)$ *para o problema de valor inicial neste intervalo.*

Uma idéia da demosntração do teorema acima pode ser encontrada na página 88 da referência [1].

Exemplo 1.3 *Verificar que a função* $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ *é uma solução para o problema de valor inicial*

$$y'' - 4y \;=\; 12x, \;\; sendo, \qquad y(0) = 4 \;\; e \;\; y'(0) = 1.$$

Solução:

Como a equação diferencial é linear, os coeficientes, assim como $g(x) = 12x$, são contínuos e $a_2(x) = 1 \neq 0$ em qualquer intervalo contendo $x = 0$. Concluímos a partir do Teorema da Existência de uma Única Solução que a função dada é a única solução.

1.3 Problema de valor de contorno

Um outro tipo de problema consiste em resolver uma equação diferencial de segunda ordem ou maior na qual a variável dependente y ou suas variáveis são especificadas em pontos diferentes. Um problema como a equação (1.1), sujeita a, $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$, é chamado de problema de valor de contorno. Os valores especificados $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$ são chamados de condições de contorno ou de fronteira. Uma solução para o problema em questão é uma função que satisfaça a equação diferencial em algum intervalo I, contendo a e b, cujo gráfico passa pelos pontos (a, y_0) e (b, y_1), conforme Figura 1.2:

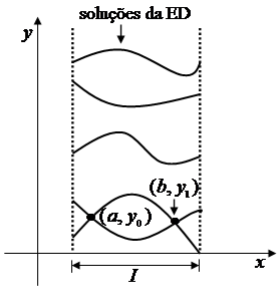

Figura 1.2: O gráfico representa a solução de uma Equação Diferencial sujeito às condições de contorno.

Fonte: Figura retirada com adaptações da referência [1]

Para uma equação diferencial de segunda ordem, outras condições de contorno podem ser

$$\begin{aligned} y'(a) &= y'_0, \qquad y(b) = y_1; \\ y(a) &= y_0, \qquad y'(b) = y'_1; \end{aligned}$$

ou,

$$y'(a) = y'_0, \qquad y'(b) = y'_1,$$

em que y_0, y'_0, y_1 e y'_1 denotam constantes arbitrárias. Estes três pares de condições são casos especiais das condições de contorno,

$$\begin{aligned} \alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) &= \gamma_1 \\ \alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) &= \gamma_2. \end{aligned}$$

O exemplo abaixo mostra que, mesmo quando as condições do Teorema da Existência de uma Única Solução são satisfeitas, um problema de valor de contorno pode ter

(i) várias soluções

(ii) uma única solução

(iii) nenhuma solução.

Exemplo 1.4 *A família a dois parâmetros de soluções* $y = C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x$, *é uma solução para a equação diferencial,* $y'' + 16y = 0$. *Suponha que esta solução também satisfaça as condições de contorno*

$$y(0) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Solução:

Observe que a primeira condição

$$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen} 0,$$

implica $C_1 = 0$; assim, $y = C_2\, sen\, 4x$. Mas, quando $x = \dfrac{\pi}{2}$, temos,

$$0 \;=\; C_2\, sen\, 2\pi.$$

Como, $sen\, 2\pi = 0$, esta última condição é satisfeita com qualquer escolha de C_2. Logo, uma solução para o problema

$$y'' + 16y \;=\; 0, \qquad y(0) = 0 \qquad e \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

é a família a um parâmetro,

$$y \;=\; C_2\, sen\, 4x.$$

Há uma infinidade de funções satisfazendo a equação diferencial que passam pelos pontos $(0, 0)$ e $(\pi/2, 0)$.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes

2.1 Equação Linear Homogênea

A forma geral das equações diferenciais lineares de 2ª ordem é,

$$y'' + p\,(x)y' + q(x)y \;=\; f(x), \tag{2.1}$$

onde p, q e f são funções contínuas conhecidas, definidas em um certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Entretanto, primeiro estudaremos os casos particulares da equação (2.1) em que os coeficientes p e q são constantes reais. Mais precisamente, as equações da forma,

$$y'' + ay' + by \;=\; f(x), \tag{2.2}$$

em que a e b são constantes. Quando a função $f(x)$ for igual a zero, para todo $x \in I$, a equação (2.2) é linear homogênea.

Exemplo 2.1 *Determinar a solução da equação diferencial linear homogênea, com coeficientes constantes,*

$$y'' + ay' \;=\; 0. \tag{2.3}$$

Solução:

Reduzindo-a uma equação de 1ª ordem, temos: $y' = u$, o que nos dá, $y'' = u'$. Logo,

$$u' + au = 0.$$

Como estamos diante de uma equação de 1ª ordem do tipo linear, vamos encontrar o fator de integração. Isto é,

$$e^{\int adx} = e^{ax}.$$

Então,

$$u'e^{ax} + ae^{ax}u = 0,$$

logo,

$$\frac{d}{dx}(ue^{ax}) = 0.$$

Assim,

$$ue^{ax} = C_1.$$

E daí,

$$u(x) = C_1e^{-ax}.$$

Como $y' = u$, teremos,

$$y' = C_1e^{-ax}.$$

Integrando ambos os membros, temos,

$$y(x) = \int C_1e^{-ax}dx.$$

Portanto a solução geral da equação (2.3) é:

$$y(x) = -\frac{C_1}{a}e^{-ax} + C_2.$$

1.1.1 Princípio da superposição

O que fazer quando tivermos um problema mais geral como

$$y'' + ay' + by = 0? \tag{2.4}$$

Neste caso precisamos fornecer uma resposta satisfatória. Estabeleceremos alguns resultados que serão enunciados para o caso mais geral, a equação (2.1), embora nosso foco principal seja o seu caso particular em que os coeficientes sejam constantes. Comecemos com o princípio da superposição que estabelece o fato de que o conjunto das soluções da equação homogênea associada à equação (2.1), isto é,

$$y'' + p\,(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.5}$$

em que os coeficientes p e q é um espaço vetorial.

Teorema 2.1 *Sejam y_1 e y_2 soluções da equação, (2.5) no intervalo I. Se A e B forem constantes reais, então a combinação linear*

$$y(x) = A\,y_1(x) + B\,y_2(x), \tag{2.6}$$

é uma solução da equação (2.5).

Exemplo 2.2 *Verificar se, $y_1 = sen\,x$ e $y_2 = cos\,x$ são soluções da equação homogênea $y'' - y = 0$.*

Solução:

Pelo princípio da superposição, $y = A\,sen\,x + B\,cos\,x$, logo, como no exemplo anterior, ela é solução geral desta equação.

Exemplo 2.3 *Verifique se $y\,(x) = x^3$ é solução da equação não-linear $y \cdot y'' = 6x^4$.*

Solução:

Temos que

$$y' = 3x^2 \quad e \quad y'' = 6x.$$

Logo,

$$y \cdot y'' = x^3 \cdot \ 6x = 6x^4.$$

Note que, $y(x) = A\,x^3$, com $A^2 \neq 1$ não é solução de,

$$y \cdot y'' = 6x^4.$$

De fato, pois,

$$y' = 3Ax^2 \, e \, y'' = 6\,A\,x.$$

Assim,

$$y \cdot y'' = A\,x^3 \cdot 6\,A\,x = A^2 6x^4.$$

Como $A^2 \neq 1$, então, $y(x) = Ax^3$ não é solução da equação $y \cdot y'' = 6x^4$. Portanto, concluímos que o princípio da superposição não se aplica a equações não lineares.

Nesta seção introduziremos o conceito de dependência linear de funções. Este conceito é um caso particular de uma definição mais geral relativa a subconjuntos de um espaço vetorial, que é objeto de estudo da Álgebra Linear.

2.1.2 Dependência linear

Definição 2.1 *Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ é linearmente dependente em um intervalo I se existem constantes $C_1, C_2, ..., C_n$ não todas nulas, tais que*

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + ... + C_n f_n(x) \quad = \quad 0, \ \ \forall x \in I.$$

2.1.3 Independência linear

Definição 2.2 *Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ é linearmente independente em um intervalo I se ele não é linearmente dependente no intervalo. Em outras palavras, um conjunto de funções é linearmente independente em um intervalo se as únicas constantes para as quais*

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + ... + C_n f_n(x) \quad = \quad 0, \forall x \in I, tal\, que\, C_1 = C_2 = ... = 0.$$

Ou seja, concluímos que duas funções são linearmente independentes quando nenhuma delas é múltipla da outra em um intervalo.

2.1.4 Wronskiano

Definição 2.3 *Sejam f e g duas funções deriváveis em um certo intervalo aberto I. O wronskiano das funções f e g, no intervalo I, é definido pelo seguinte determinante*

$$W(f,g)(x) = det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

Quando não houver possibilidade de confusão designaremos o wronskiano de f e g simplesmente por $W(x)$.

Teorema 2.2 *Sejam y_1 e y_2 soluções da equação linear de segunda ordem, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, definidas em um intervalo aberto I.*

i) Se y_1 e y_2 forem linearmente dependentes, então $W(x) = 0, \ \forall x \in I$.

ii) Se y_1 e y_2 forem linearmente independentes, então $W(x) \neq 0, \ \forall x \in I$.

A demonstração deste Teorema, encontra-se na página 149 da referência [1].

Teorema 2.3 *Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$, n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (2.5) em um intervalo I. Então, toda solução $y(x)$ para (2.5) é uma combinação linear das n soluções independentes $y_1, y_2, ..., y_n$, ou seja, podemos encontrar constantes $C_1, C_2, ..., C_n$, tais que*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n.$$

Exemplo 2.4 *Consideremos a equação, $y'' - y = 0$.*

Solução:

Note que, $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{-x}$ são duas soluções linearmente independentes. Pois, $W(x) = -2$, logo concluímos que tais funções são linearmente independentes, de modo que a solução geral da equação é,

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

Exemplo 2.5 *Considere a equação diferencial linear de segunda ordem, não-homogênea,*

$$y'' - y = x^2.$$

Solução:

Primeiro, observemos a equação homogênea

$$y'' - y = 0.$$

Sabemos que

$$y_1(x) = e^x \ e \ y_2(x) = e^{-x},$$

são soluções linearmente independentes, logo,

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{-x},$$

é a solução geral da equação homogênea. Além disso, podemos verificar que,

$$y_p(x) = -x^2 - 2,$$

é uma solução particular da equação não-homogênea. Pois,

$$y_p'(x) = -2x \quad e \quad y_p''(x) = -2,$$

e daí,

$$y_p'' - y_p = -2 - (-x^2 - 2) = -2 + x^2 + 2 = x^2.$$

Designemos por y a solução geral de, $y'' - y = x^2$. Consequentemente, $y - y_p$ satisfaz:

$$(y - y_p)'' - (y - y_p) = y'' - y_p'' - y + y_p = x^2 - x^2 = 0.$$

Ou seja, $y - y_p$ é solução da equação homogênea. Assim, existem constantes A e B tais que

$$y(x) - y_p(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

Portanto,

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{-x} - x^2 - 2.$$

Agora, considere a equação linear homogênea

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2.7}$$

em que a, b e c são constantes reais. Relembrando que, caso determinemos duas soluções linearmente independentes, a solução geral será dada como a combinação linear destas soluções linearmente independentes. Inicialmente, procuraremos soluções da forma $y = e^{\lambda x}$, com λ constante.

Logo,

$$\begin{aligned} y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Substituindo esses valores na equação diferencial (2.7), temos:

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0,$$

como $e^{\lambda x}$ é sempre diferente de zero, chega-se a equação

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

que é chamada equação característica de 2º grau.

2.2 Raízes Reais e Distintas

Teorema 2.4 *Se λ_1 e λ_2 forem duas raízes reais e distintas da equação característica, então a solução geral da equação (2.7) é dada por:*

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \tag{2.8}$$

Demonstração: Desde que λ_1 e λ_2 sejam raízes da equação $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, as funções $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ são soluções da equação linear homogênea (2.7). Portanto, a expressão dada em (2.8) é a solução geral da equação linear homogênea (2.7).

Exemplo 2.6 *Encontrar a solução geral da equação*

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Solução:

A equação característica da equação em estudo é:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Logo,

$$\lambda = 3,$$

ou,

$$\lambda = 2.$$

Portanto,

$$y(x) = Ae^{3x} + Be^{2x}.$$

2.3 Raízes Reais e Iguais

Teorema 2.5 *Se a equação característica tiver duas raízes reais e iguais $\lambda_1 = \lambda_2$, então a solução geral da equação homogênea (2.7) será dada por:*

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}.$$

Ou,

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}(A + Bx).$$

Demonstração: A função $e^{\lambda_1 x}$ é solução da equação diferencial (2.7), pois λ_1 é raiz de sua equação característica. Para concluir, basta mostrar que $xe^{\lambda_1 x}$ também é solução. Logo,

$$y = xe^{\lambda_1 x} \tag{2.9}$$

Encontrando respectivamente, a primeira e a segunda derivada, da função (2.9), temos:

$$\begin{aligned} y' &= e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x} \\ y'' &= e^{\lambda_1 x}\left(2\lambda_1 + \lambda_1^2 x\right). \end{aligned}$$

Agora, substituindo as derivadas na equação (2.7), obtemos:

$$a\left(e^{\lambda_1 x}\left(2\lambda_1 + \lambda_1^2 x\right)\right) + b\left(e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x}\right) + c\left(x e^{\lambda_1 x}\right) = 0.$$

Assim,

$$\left(2a\,\lambda_1 + a\,\lambda_1^2 x + b + b\,\lambda_1 x + cx\right) e^{\lambda_1 x} = 0.$$

Logo,

$$\left(2a\,\lambda_1 + b + \left(a\,\lambda_1^2 + b\,\lambda_1 + c\right) x\right) e^{\lambda_1 x} = 0.$$

Como, $\lambda_1 = -\dfrac{b}{2a}$, temos:

$$\left(2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right) + \left(a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + \frac{c}{1}\right) x\right) e^{\lambda_1 x} = 0.$$

Daí,

$$0 + \left(\frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}\right) x e^{\lambda_1 x} = \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) x\, e^{\lambda_1 x} = 0.$$

Portanto, como $\Delta = 0$, o teorema esta demonstrado, haja vista que as funções $e^{\lambda_1 x}$ e $xe^{\lambda_1 x}$ são linearmente independentes.

Exemplo 2.7 *Determinar a solução da equação*

$$y'' - 10y' - 25y = 0.$$

Solução:

A equação característica é:

$$\lambda^2 - 10\lambda - 25 = 0,$$

cujas raízes são reais e iguais a $\lambda = -5$. Logo, a solução geral da equação é

$$y(x) = e^{-5x}(A + Bx).$$

2.4 Raízes Complexas

Nessa situação as raízes são conjugadas, ou seja, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ com, $\beta \neq 0$, em que $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária. Sendo α chamada parte real de λ_1 e de λ_2, enquanto β e $-\beta$ é chamada parte imaginária de λ_1 e de λ_2. Segue que

$$\alpha \;=\; -\frac{b}{2a} \;\; e \;\; \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}. \tag{2.10}$$

Teorema 2.6 *Se λ_1 e λ_2 são raízes complexas da equação característica, então a solução geral da equação diferencial (2.7) é dada por,*

$$y(x) \;=\; e^{\alpha x}(A\,cos\,(\beta\,x) + B\,sen\,(\beta\,x)),$$

em que A e B são constantes.

Demonstração: As funções $e^{\alpha x}cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}sen(\beta x)$ são soluções da equação diferencial (2.7). Façamos, por questão de completicidade, o cálculo para uma delas. No caso em questão consideraremos:

$$y \;=\; e^{\alpha x}cos(\beta x). \tag{2.11}$$

Encontrando respectivamente, a primeira e a segunda derivada da função (2.11), temos:

$$y' \;=\; \alpha\,e^{\alpha\,x}\,cos\,\beta\,x - \beta\,e^{\alpha\,x}\,sen\,\beta = e^{\alpha\,x}\,\left(\alpha\,cos\,\beta\,x - \beta\,sen\,\beta\,x\right),\; e$$

$$\begin{aligned} y'' &= \alpha^2\,e^{\alpha\,x}\,cos\,\beta\,x - \beta\,e^{\alpha\,x}sen\,\beta - \beta\,e^{\alpha\,x}\,sen\,\beta - \beta^2\,e^{\alpha\,x}\,cos\,\beta\,x \\ &= e^{\alpha x}\left(\alpha^2\,cos\,\beta x - 2\alpha\beta\,sen\,\beta x - \beta^2\,cos\,\beta\,x\right). \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy \;&=\; a\left(e^{\alpha x}\left(\alpha^2\,cos\,\beta\,x - 2\alpha\,\beta\,sen\,\beta x - \beta^2\,cos\,\beta x\right)\right) \\ &+\; b(e^{\alpha x}(\alpha\,cos\,\beta\,x - \beta\,sen\,x)) + ce^{\alpha x}cos\,\beta\,x. \end{aligned}$$

Daí, teremos

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}\left(\left(a\,\alpha^2 - a\,\beta^2 + b\,\alpha + c\right)\,cos\,\beta\,x\right) \;&+\; e^{\alpha\,x}\left((-2a\alpha\beta - b\beta)\;sen\beta x\right) \\ = \left(\left(a\,\alpha^2 - a\,\beta^2 + b\,\alpha + c\right)\,cos\,\beta\,x\right) \;&-\; \left((2a\,\alpha\,\beta + b\,\beta)\;sen\,\beta\,x\right). \end{aligned}$$

Agora, usando as expressões de (2.10), temos que:

$$a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c \;=\; a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - a\,\frac{(4ac-b^2)}{4a^2} + \left(-\frac{b}{2a}\right)b + c.$$

Daí,

$$a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c \;=\; \frac{b^2}{4a} + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0.$$

Tomando, novamente (2.10), teremos que a expressão $2a\alpha\beta + b\beta$ se anula. Assim, $ay'' + y' + cy = 0$. Para concluírmos a demonstração deve-se mostrar que as funções $e^{\alpha x}cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}sen(\beta x)$ são linearmente independentes. Para isso, calculemos o wronskiano de tais funções. A derivada de $e^{\alpha x}cos(\beta x)$ já foi calculada em (2.11), a derivada de $e^{\alpha x}sen(\beta x)$ é dada por:

$$\left(e^{\alpha x}sen\,(\beta x)\right)' \;=\; e^{\alpha x}\left(\alpha\, sen\,(\beta x) + \beta\, cos\,(\beta x)\right).$$

Daí, o wonskiano, $W(x)$, destas funções é:

$$det\begin{pmatrix} e^{ax}\,cos(\beta x) & e^{ax}\,sen(\beta x) \\ e^{ax}\,\left(\alpha\, cos\,(\beta x) - \beta\, sen(\beta x)\right) & e^{ax}\,\left(\alpha\, sen\,(\beta x) + \beta\, cos(\beta x)\right) \end{pmatrix}.$$

Portanto, $W(x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$, pois $\beta \neq 0$. Então as soluções $e^{\alpha x}cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}sen(\beta x)$ da equação homogênea são linearmente independentes, o que conclui a demonstração do teorema.

Exemplo 2.8 *Considere a equação diferencial*

$$y'' + y' + y \;=\; 0.$$

Solução:

Sua equação característica é

$$\lambda^2 + \lambda + 1 \;=\; 0.$$

Cujas raízes são

$$\lambda_1 \;=\; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad e \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Logo,

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad e \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, a solução geral é,

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\,sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

2.5 Equação linear não-homogênea

Observe como proceder com uma equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes, que não seja homogênea.

Exemplo 2.9 *Considere a equação diferencial*

$$y'' - y = 3.$$

Solução:

Observe que $y_p(x) = -3$ é uma de suas soluções. Além disso a equação homogênea associada a ela é:

$$y'' - y = 0.$$

Sua equação característica é,

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

cujas raízes são:

$$\lambda_1 = 1 \;\; e \;\; \lambda_2 = -1.$$

Logo, a solução geral da equação homogênea é,

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

Seja, $y = y(x)$, uma solução qualquer da equação não-homogênea. Podemos verificar facilmente que a função $y - y_p$ é solução da equação linear homogênea. Portanto,

$$y - y_p = Ae^x + Be^{-x},$$

ou seja, a solução geral da equação não-homogênea é,

$$y = Ae^{x} + Be^{-x} - 3.$$

O procedimento desenvolvido nesse exemplo nos fornece uma idéia para determinarmos soluções gerais de equações não-homogêneas. Entretanto, existem vários métodos para a determinação de soluções particulares de equações não-homogêneas. Vamos desenvolver neste trabalho o seguinte método:

2.6 Método dos coeficientes a determinar

Esse método é uma maneira direta de determinar uma solução particular, cuja expressão é obtida por uma inspeção motivada pela forma do termo não-homogêneo.

Exemplo 2.10 *Determinar a solução geral da equação não-homogênea, considerando o caso que o segundo membro não é um polinômio,*

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}. \tag{2.12}$$

Solução:

A equação homogênea associada é:

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

sua equação característica é:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

cujas raízes são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2, \\ \lambda_2 &= 1. \end{aligned}$$

A solução geral da equação homogênea é:

$$y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{x}.$$

Agora, devemos encontrar uma solução particular da equação não-homogênea (2.12). Como o segundo membro da referida equação é $2e^{3x}$ e qualquer derivada de e^{3x} é um múltiplo dessa função, iremos em busca de uma solução particular y_p da forma,

$$y_p(x) = Ce^{3x}.$$

Encontrando a primeira e a segunda derivada respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 3Ce^{3x} \quad e \\ y_p''(x) &= 9Ce^{3x}. \end{aligned}$$

Substituindo esses valores na equação (2.12), obtém-se:

$$9Ce^{3x} - 3 \cdot (3Ce^{3x}) + 2 \cdot (Ce^{3x}) = 2e^{3x}.$$

Logo,

$$9C - 9C + 2C = 2,$$

o que nos fornece $C = 1$, ou seja, a solução particular é

$$y_p(x) = e^{3x}.$$

Portanto, a solução geral da equação não-homogênea (2.12) é,

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ y_p(x) &= Ae^{2x} + Be^{x} + e^{3x}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.11 *Determinar a solução geral da equação não-homogênea, considerando o caso que o segundo membro é a função seno ou cosseno*

$$y'' - 3y' + 2y = sen\, x. \tag{2.13}$$

Solução:

Sua equação homogênea associada é:

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

sua equação característica é:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 \quad = \quad 0,$$

cujas raízes são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 2. \end{aligned}$$

A solução geral da equação homogênea é:

$$y_h \quad = \quad Ae^x + Be^{2x}.$$

O segundo membro da equação (2.13) é a função seno e nas suas derivadas sempre aparece seno ou cosseno. Então, uma solução particular é da forma,

$$y_p(x) \quad = \quad A\, sen\, x + B\, cos\, x.$$

Calculando, respectivamente as derivadas, temos:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A\, cos\, x - B\, sen\, x \\ y_p''(x) &= -A\, sen\, x - B\, cos\, x. \end{aligned}$$

Assim, substituindo em (2.13), obtemos:

$$(-A\, sen\, x - B\, cos\, x) - 3(A\, cos\, x - B\, sen\, x) + 2(A\, sen\, x + B\, cos\, x) \quad = \quad sen\, x.$$

Isto é,

$$(-A + 3B + 2A) sen\, x + (-B - 3A + 2B) cos\, x \quad = \quad sen\, x,$$

ou,

$$(A + 3B) sen\, x + (B - 3A) cos\, x \quad = \quad sen\, x.$$

Como isso, temos o seguinte sistema linear,

$$\begin{cases} A + 3B & = 1 \\ -3A + B & = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$A = \frac{1}{10} \quad e \quad B = \frac{3}{10}.$$

Logo,

$$y_p(x) = \frac{1}{10}\, sen\, x + \frac{3}{10}\, cos\, x.$$

Portanto, a solução geral da equação (2.13) é:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ y(x) &= Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{10}\, sen\, x + \frac{3}{10}\, cos\, x. \end{aligned}$$

Motivados pelos exemplos descritos nesta seção, verifica-se que o método dos coeficientes a determinar se aplica quando o segundo membro $f(x)$ da equação diferencial linear de segunda ordem for de cada um dos seguintes tipos:

1. Um polinômio em x,

$$f(x) = 4x + 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = Ax + B.$$

2. Uma função exponencial e^x,

$$f(x) = e^{2x} + y \quad \Rightarrow \quad f(x) = Ae^{3x}.$$

3. Uma função $cos\, x$ ou $sen\, x$,

$$f(x) = cos\, x \quad ou \quad sen\, x \quad \Rightarrow \quad f(x) = A\, cos\, x + B\, sen\, x.$$

4. Uma combinação linear das funções descritas nos tipos acima. Por exemplo,

$$f(x) = xe^{2x}\, cos\, 3x \quad \Rightarrow \quad f(x) = (Ax + B)e^{2x}\, cos\, 3x + (Cx + D)e^{2x}\, sen\, 3x.$$

Ao usar esse método, deve-se ter um cuidado especial no caso em que a função do segundo membro da equação diferencial é do mesmo tipo que a solução geral da equação homogênea associada.

Capítulo 3

Aplicações de Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem no circuito R.L.C.

Neste capítulo o foco maior vai estar sendo o circuito R.L.C. aode sera apresentado as aplicações das EDO's em Circuitos R.L.C.(Resistor, Indutor, Capacitor) em série, visto que são equações diferenciais de 2ª ordem.

3.1 Circuito R.L.C.(Resistor, Indutor, Capacitor) em série.

Considerando uma tensão elétrica contínua ou alternada senoidal aplicada num circuito RLC série, qual é o comportamento das correntes e tensões elétricas neste circuito em função do tempo?

Hipóteses: as propriedades, ou seja, resistência, indutância e capacitância do circuito são constantes.

3.2. Formulação matemática

Nesta subseção são destacados alguns conceitos importantes para a análise do problema.

1º - Se Va e Vb são, respectivamente, os potenciais elétricos nos pontos a e b de um circuito elétrico, a diferença de potencial entre estes pontos pode ser denotada por Vab ou $V(t)$. Normalmente, esta diferença de potencial $V(t)$ será indicada com o sinal negativo, isto é:

$$Vab = -V(t).$$

2º - A Intensidade da corrente elétrica é dada pela taxa de variação da carga elétrica q em relação ao tempo t que atravessa uma seção transversal de um condutor.

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

3º - A lei de Ohm diz que a diferença de potencial V nos terminais de um resistor de resistência constante R submetido a uma corrente elétrica i, é dada por:

$$V(t) = R \cdot i(t).$$

4º - A indutância L de um indutor é uma constante relacionada com a diferença de potencial e com a taxa de corrente elétrica em relação ao tempo. Logo,

$$V(t) = L\frac{di}{dt}.$$

5º - A capacitância C de um capacitor submetido a uma carga elétrica, com uma diferença de potencial entre suas placas indicada por V, será dada por:

$$V(t) = \frac{q}{C}.$$

Conforme a lei das tensões de *Kirchhoff*, a soma algébrica das diferenças de potencial numa malha fechada é zero. Logo, o somatório das quedas de tensão sobre o resistor , sobre o indutor L e sobre o capacitor C , é igual a tensão , que é a tensão da fonte de alimentação do circuito RLC série. Na Figura 1.3 está apresentado o circuito RLC série, com as suas respectivas quedas de tensão.

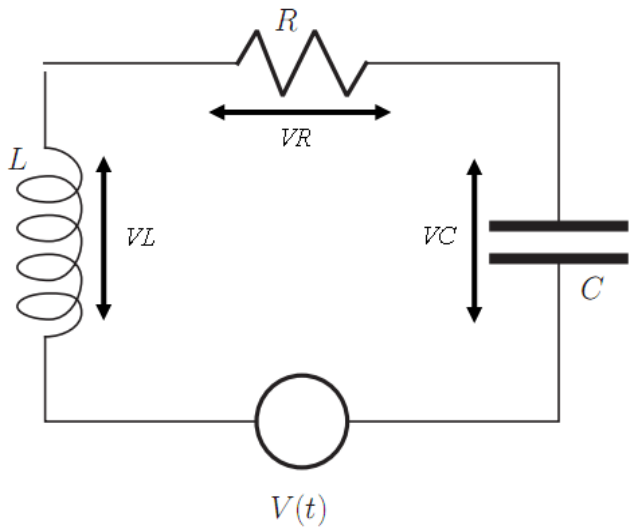

Figura 1.3.Circuito RLC série

A partir da lei *Kirchhoff*, tem-se a equação:

$$VL + VR + VC = V(t),$$

onde

$$VL = L\frac{di}{dt}; VR = Ri; VC = \frac{q}{C}.$$

Desta forma, $$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}q=V(t). \qquad (2.14)$$

Considerando $$i=\frac{dq}{dt},$$

onde: $$L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{i}{c}+R\frac{di}{dt}=\frac{dv}{dt}$$ portanto $$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=0 \qquad (2.15)$$

indutância é a propriedade que possui um indutor de gerar uma força eletromotriz (*Fem*), de auto-indução que se opõe às variações de corrente elétrica. Sua unidade de medida é o Henry (H); (resistência) é a propriedade que possui um resistor de se opor a passagem de corrente elétrica. Sua unidade de medida é o Ohm (Ω); (capacitância) é a propriedade que possui um capacitor de armazenar cargas elétricas. Sua unidade de medida é o Farad (F) e é a diferença de potencial aplicada no circuito elétrico.

Pode-se observar que existem trêz casos possíveis de ocilações para o circuito R.L.C. e adotando R/2L sendo α e $1/\sqrt{LC}$ s endo ω_0 .Onde ω_0 é a frequência de ressonância e α é o parametro de amortecimento. Os trêz casos possíveis estão dispostos nos itens de 'a' a 'c' que se seguem:

a) $\alpha > \omega_0$***: CASO SUPERAMORTECID***O: No caso superamortecido as raízes são negativas ($\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}<\alpha$) e a solução da equação homogênea é a seguinte:

$$y_H(t)=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t} \qquad (2.16)$$

Onde, s1 e s2 são, de acordo com a equação 2.16:

- $s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$
- $s_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$

Um esboço do gráfico para o caso de circuito R.L.C. superamortecido é mostrado na figura 1.4.

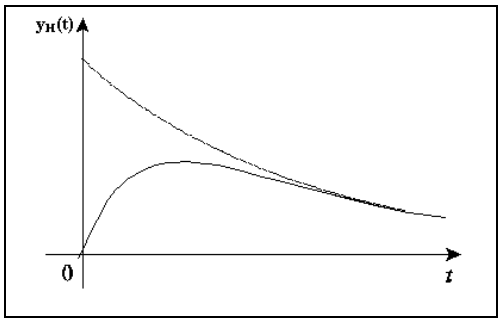

Figura 1.4**:** Gráfico para o caso superamortecido.

b) ***α = ω0 : CASO CRITICAMENTE AMORTECIDO***. No caso de amortecimentocrítico a solução mais geral, não dará a solução para

equação homogênea. Isto ocorre porque neste caso, pela equação 2.16, $s_1 = s_2 = -\alpha$ e as exponenciais da solução geral podem ser somadas resultando em uma resposta homogênea como $y_H(t) = k_3 e^{-\alpha t}$ que não torna possível satisfazer as condições iniciais de um problema.

Então, para resolver tal questão, faz-se necessário tomar a equação diferencial homogênea:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dy(t)}{dt} + \omega_0{}^2 y(t) = 0 \qquad (2.17)$$

Para $\omega_0 = \alpha$:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dy(t)}{dt} + \alpha^2 y(t) = 0 \qquad (2.18)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \alpha\frac{dy(t)}{dt} + \alpha\frac{dy(t)}{dt} + \alpha^2 y(t) = 0 \qquad (2.19)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt} + \alpha y\right] + \alpha\left[\frac{dy}{dt} + \alpha y\right] = 0 \qquad (2.20)$$

Chamando:

$$x = \frac{dy}{dt} + \alpha y \qquad (2.21)$$

Então:

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = 0 \qquad (2.22)$$

Supondo:

$$x = k_1 e^{k_2 t} \qquad (2.23)$$

Resulta em:

$$k_2 k_1 e^{k_2 t} + \alpha k_1 e^{k_2 t} = 0 \qquad (2.24)$$

Portanto:

$$k_2 = -\alpha \tag{2.25}$$

$$x = \frac{dy}{dt} + \alpha y = k_1 e^{-\alpha t} \tag{2.26}$$

Dividindo-se toda a equação 2.26 por $e^{-\alpha t}$

$$e^{\alpha t}\frac{dy}{dt} + \alpha e^{\alpha t} y = k_1 \tag{2.27}$$

$$\frac{d}{dt}\left[ye^{\alpha t}\right] = k_1 \tag{2.28}$$

$$\int d\left[y(t)e^{\alpha t}\right] = \int k_1 dt \tag{2.29}$$

$$ye^{\alpha t} = k_1 t + k_2 \tag{2.30}$$

Desta maneira, obtém-se a forma desejada para a solução (combinação de duas soluções linearmente dependentes):

$$y = k_1 t e^{-\alpha t} + k_2 e^{-\alpha t} \tag{2.31}$$

Um esboço do gráfico para o caso decircuito com amortecimento crítico é mostrado na figura 1.5.

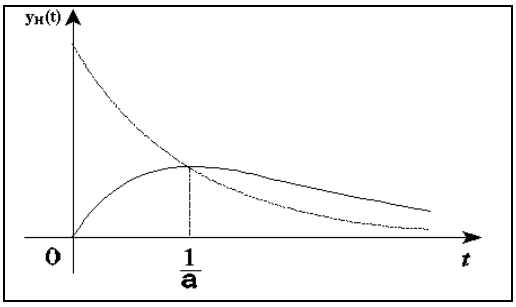

Figura 1.5**:** Gráfico para o caso de amortecimento crítico.

c) ***α<ω0*** : ***CASO SUB-AMORTECIDO***. No caso de sub-amortecimento, os valores de s_1 e s_2 são valores complexos conjugados:

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\,2}} \Rightarrow s = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^{\,2} - \alpha^2} \tag{2.32}$$

Chamando:

- $\omega_d = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \alpha^2}$
- $s = -\alpha \pm j\omega_d$

Então:

$$y_H(t) = k_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + k_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t} \tag{2.33}$$

$$y_H(t) = e^{-\alpha t}\left[k_1 e^{j\omega_d t} + k_2 e^{-j\omega_d t}\right] \tag{2.34}$$

Usando a identidade de Euler:

$$e^{j\vartheta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.35}$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.36}$$

$$y_H(t) = e^{-\alpha t}\left[k_1(\cos\omega_d t + \mathrm{sen}\,\omega_d t) + k_2(\cos\omega_d - j\,\mathrm{sen}\,\omega_d t)\right] \tag{2.37}$$

$$y_H(t) = e^{-\alpha t}\left[(k_1 + k_2)\cos\omega_d t + j(k_1 - k_2)\,\mathrm{sen}\,\omega_d t\right] \tag{2.38}$$

Como k1 e k2 são parcelas constantes, então, pode-se denominar:

$$\begin{aligned} A_1 &= k_1 + k_2 \\ A_2 &= k_1 - k_2 \end{aligned} \tag{2.39}$$

E a equação ficará da seguinte forma:

$$\begin{gathered} y_H(t) = e^{-\alpha t}\left[A_1 \cos\omega_d t + A_2\,\mathrm{sen}\,\omega_d t\right] \\ ou \\ y_H(t) = Be^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi) \end{gathered} \tag{2.40}$$

O gráfico resultante da equação 2.40 tem a forma de circuito sub-amortecido mostrada na figura 1.6.

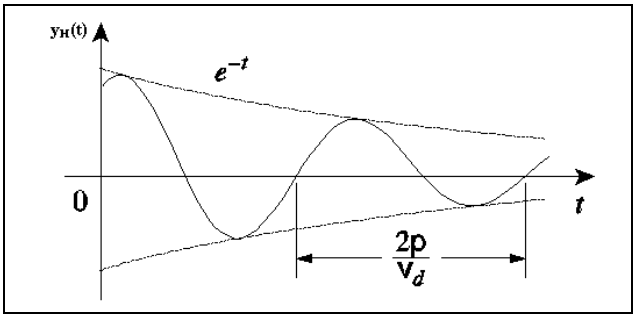

Figura 1.6**:** Gráfico para o caso sub-amortecido.

Conclusão

Este trabalho procurou demonstrar de maneira clara e objetiva os conceitos gerais e especifícos necessários para uma aprendizagem significativa de equações diferenciais. Sendo que, nosso foco foi as equações diferenciais de 2ª ordem aplicando no modelo clássico do Circuito R.L.C.(Resistor, Indutor, Capacitor).

A parte teórica, isto é, o primeiro e o segundo capítulo trouxeram definições e procedimentos que julgamos essenciais para o estudo e a aprendizagem do tema proposto, procurando sempre exemplificar detalhadamente. Iniciando-se por exemplos mais simples e gradativamente aumentando o grau de complexidade, buscando assim facilitar a compreensão dos contéudos abordados.

Os modelos clássicos da Física são representados por equações diferenciais, mas neste trabalho foi mostrado apenas um, o Circuito RLC, um circuito que apresenta Resistor, Indutor, e Capacitor em série, explorando todos os casos e assim aplicando as EDO's de segunda ordem no circuito R.L.C. em série.

Bibliografia

[1] ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Equacoes Diferenciais. Traducao de Antonio Zumpano.3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2005.

[2] MACHADO, Kleber Daum. Equacoes Diferenciais Aplicadas a Fisica. .3. ed. Ponta Grossa UEPG, 2004.

[3] RESNICK, Robert; HALLIDAY, David; KRANE,Kenneth S. Fisica V.2.. Traducao de Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco...[et.al.].5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

[4] CORREA, Francisco Júlio Sobreira de Araújo. Equações Diferenciais Ordinárias. Belém: [s.n.],[200-?].

[5] GUIDORIZZI, Hamilton luiz. Um Curso de CÁLCULO. v. 1. .5. ed. São Paulo LTC, 2001.

[6] AMALDI, Ugo. Imagens da fisica . São Paulo: Scipione, 1997.

[7] FRÓIS, Rafael da silva. Trabalho de coclusão de curso, UNIFESSPA. Pará: 2016.

[8] NUSSENZUEIG, Herch Moysés. Curso basico de Física-vol.3/H. Moysés Nussenzueig-1ª edição--São Paulo Blucher, 1997.

[9] PORCUINCULA, Duarte Cleber Mateus. Artigo Modelagem Matemática para um circuito R.L.C. em série. [ano -?]

Anexo

Relatório do experimento: Aplicações de EDO's de segunda ordem no circuito R.L.C. em série.

1. Objetivo:

O objetivo desse experimento é observar com o uso do osciloscópio, algumas formas de onda que pode ocorrer em um circuito R.L.C. em série, circuito esse que apresenta resistência, indutância, e capacitância.

Imagens dos materiais usados

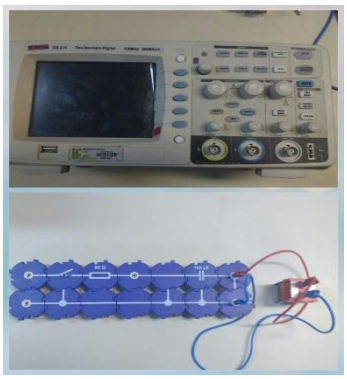

Imagem 1.1

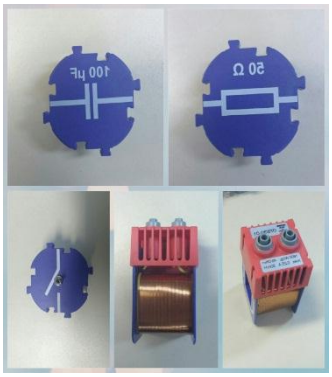

Imagem 1.2

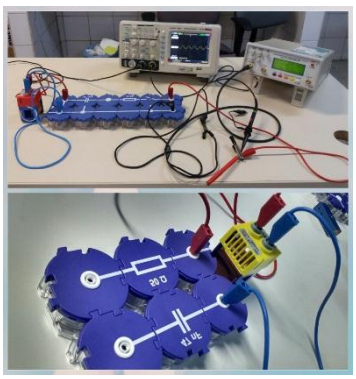

Imagem 1.3

1. Dados do primeiro experimento:

- Indutor (L) de 3 mH
- Capacitor (C) de 47 nF
- Resistor (R) de (50+50+3) Ω
- Fonte
- Tipo de onda: Quadrada
- Vpp: 10 v
- Frequência: 500 Hz

De acordo como os parâmetros R.L.C. acima definidos e de acordo com a relação:

$$\Delta < 0$$

$$\alpha^2 - 4{\omega_0}^2 < 0$$

$$\alpha^2 < 4{\omega_0}^2$$

$$\frac{\alpha}{2} < \omega_0$$

Onde $\alpha = \frac{R}{2\,L}$ é a frequência neperiana ou fator de amortecimento expresso em nepers por segundo (Np/s); e $\omega 0$ é a frequência de ressonância do sistema, dada pela fórmula matemática $\omega 0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\frac{103}{3.10^{-3}} < \frac{1}{\sqrt{47.3.10^{-9}.3.10^{-3}}}$$

$$34333 < 84215{,}19$$

Conforme a condição de $\Delta < 0$, nessa situação as raízes da equação característica são complexas e conjugadas, e o efeito pode ser observado no osciloscópio caso sub-amortecido conforme a imagem gerada abaixo.

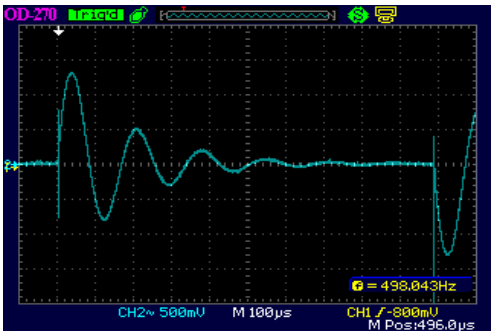

Imagem 1.4. Caso sub-amortecido.

Outro caso bem interessante que também pode-se observar durante o experimento, e o caso em que $\Delta > 0$, em que as duas raízes da equação característica foi dada por duas raízes distintas e reais, neste segundo experimento foi conservado o mesmo valor do indutor e do capacitor e aumentando apenas a resistência, e isso pode ser observado nos dados a seguir.

3. Dados do segundo experimento:

- Indutor (L) de 3 mH
- Capacitor (C) de 47 nF
- Resistor (R) de (1 k+50+3) Ω
- Fonte
- Tipo de onda: Quadrada
- Vpp: 10 v
- Frequência: 500 Hz

$$\Delta > 0$$

$$\alpha^2 - 4{\omega_0}^2 > 0$$

$$\alpha^2 > 4{\omega_0}^2$$

$$\frac{\alpha}{2} > \omega_0$$

$$\frac{1053}{3.10^{-3}} < \frac{1}{\sqrt{47.3.10^{-9}.3.10^{-3}}}$$
$$175500 > 84215{,}19$$

Neste caso nota-se que ocorre um efeito de onda superamortecida, e esse efeito pode ser observado na imagem 1.5 gerada no osciloscópio.

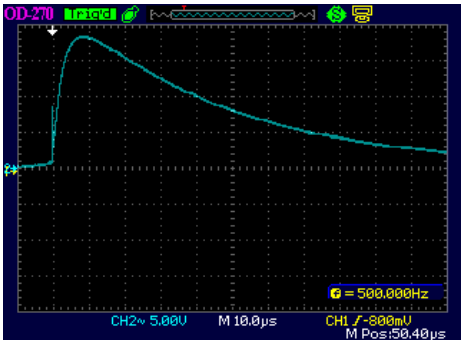

Imagem 1.5. Caso de superamortecimento.

No terceiro experimento não foi obtido êxito, pois ficou muito difícil assimilar um valor à resistência, que fizesse com que a frequência neperiana anulasse frequência de ressonância do sistema, que ocorre no seguinte caso:

- Quando o $\Delta = \mathbf{0}$ fazendo com que as duas raízes da equação característica sejam iguais, gerando um efeito de onda crítica amortecida.

Na imagem 1.6 observe o caso mais próximo de onda crítica amortecida que foi adquirido nesse experimento.

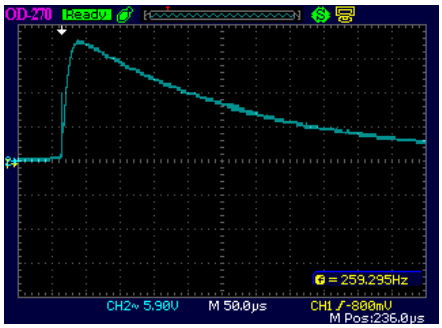

Imagem 1.6

Conclusão

Com auxilio do técnico do laboratório de física *(UNIFESSPA)* Caio Fernando consegui realizar o experimento, e entender através do mesmo, que dependendo da posição das raízes da equação característica, podem existir trêz respostas possíveis para o caso de oscilação amortecida, que são essa: distintas reais e, reais e iguais, complexo conjugadas. Neste experimento com o auxílio do osciloscópio, pôde-se realizar com êxito dois caso de oscilação amortecida, o sub-amortecido e o superamortecido, e pôde-se observar que dependem diretamente de α e ω_0, para que ocorra os efeito de oscilação, fazendo com que sejam eles, os dois parâmetros que caracterizam o comportamento da rede de segunda ordem.